Der Frequenzsatz von Kalman-Jakubovich mit einer Anwendung zur Abschätzung singulärer Werte

Tobias Damm

8. Januar 1997

Inhaltsverzeichnis

1

Der Frequenzsatz von Kalman-Jakubovich

1.1 Einführung

Der Frequenzsatz von Kalman-Jakubovich (oder auch von Kalman-Popov-Jakubovich), ist ein Satz aus der Kontrolltheorie. Die Ausgangssituation ist folgende: Man möchte das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= \phi(y,t) \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad \begin{cases} A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{K}^{n\times m} \\ C \in \mathbb{K}^{p\times n} \\ \phi : \mathbb{K}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

beispielsweise auf Stabilität untersuchen. Brauchbare Resultate können erzielt werden, wenn man die Nichtlinearität ϕ durch eine Nebenbedingung in Gestalt einer hermiteschen Form $G(y,u)$ ersetzen kann:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad \text{wobei } G(y,u) \leq 0. \tag{1.2}$$

Die Stabilitätsuntersuchung läuft nun im wesentlichen auf die Konstruktion oder den Nachweis der Existenz einer Ljapunovfunktion hinaus, und es ist wiederum naheliegend, daß man sich bei der Suche nach Ljapunovfunktionen auf eine spezielle Klasse von Funktionen beschränken muß. In unserem Rahmen ist das die Klasse der hermiteschen Formen $V(x) = x^*Hx$ mit hermiteschem H. Die Bedingung an eine Ljapunovfunktion des Systems (1.2) ist

$$\dot{V} = 2\mathrm{Re}\, x^*H(Ax + Bu) \leq 0 \qquad \text{für } G(y,u) \leq 0. \tag{1.3}$$

Probleme bereitet die Anwesenheit der Nebenbedingung $G(y,u) \leq 0$, doch läßt sich (nach [Jak77]) Bedingung (1.3) umformen in

$$2\mathrm{Re}\, x^*H(Ax + Bu) - G(y,u) \leq 0 \qquad \text{für alle } x, u. \tag{1.4}$$

Der Äquivalenz von (1.3) und (1.4) liegt dabei ein Trennungssatz für konvexe Gebiete zugrunde. Nach Sätzen von Hausdorff und Dines (vgl. ebenfalls [Jak77]) ist der numerische Wertebereich eines Paares hermitescher Formen, aufgefaßt als Zahlenpaar, eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Bedingung (1.3) besagt, daß die zu den beiden dortigen Formen zugehörige konvexe Menge den vierten (Südost-)Quadranten nicht trifft, also von diesem

durch eine Gerade getrennt werden kann. Nach geeigneter Normierung erhält man die äquivalente Bedingung (1.4).
Auf diese Situation bezieht sich der Frequenzsatz. Er besagt für kontrollierbare Systeme, daß eine hermitesche Matrix H, die (1.4) erfüllt, genau dann existiert, wenn G auf dem Graphen der Frequenzmatrix des Systems stets positiv semidefinit ist.
Wir werden zwei Beweise für diesen wichtigen Satz geben. Der erste Beweis wurde von Rantzer im laufenden Jahr veröffentlicht und ist erstaunlich kurz und einfach. Er arbeitet mit einem ähnlichen Trennungsargument wie dem oben beschriebenen, wobei die zu trennenden Mengen in höherdimensionalen Räumen liegen; der entscheidende Schritt in Rantzers Beweis ist, diese Mengen zu identifizieren. Der zweite Beweis ist ein klassischer konstruktiver Beweis von Jakubovich, der sich auf Faktorisierungssätze für Matrixpolynome stützt. Ein ähnlicher Beweis findet sich auch in [Popov73].

1.2 Die Frequenzbedingung und ihre Notwendigkeit

Wir betrachten das System $\dot{x} = Ax + Bu$ mit dem speziellen Eingang $u = u_0 e^{i\omega t}$. Dann sind Zustand und Ausgang des Systems ebenfalls von der Gestalt $x = x_0 e^{i\omega t}$ und $y = y_0 e^{i\omega t}$. Die Transformation $u_0 \to y_0$ wird durch die Frequenzmatrix

$$\chi(i\omega) := C(i\omega I - A)^{-1} B \in \mathbb{C}^{p\times m}$$

beschrieben:

$$\begin{array}{l} x_0 = (i\omega I - A)^{-1} B u_0 \\ y_0 = C x_0 = \chi(i\omega) u_0 \end{array}, \quad \text{also auch} \quad \begin{array}{l} x = (i\omega I - A)^{-1} B u \\ y = \chi(i\omega) u \end{array}. \tag{1.5}$$

Wir setzen

$$A_\lambda := \lambda I - A, \quad \delta(\lambda) := \det A_\lambda.$$

Alle Polstellen von χ sind Nullstellen von δ, insbesondere ist $\delta(\lambda)\chi(\lambda)$ ein Matrixpolynom, dessen Grad kleiner als n ist. Die hermitesche Form $G(y,u)$ habe die Gestalt

$$G(y,u) = (y^*, u^*) \begin{pmatrix} G_0 & G_1 \\ G_1^* & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}; \tag{1.6}$$

entlang des Graphen der Frequenzmatrix läßt sie sich als Form nur in u schreiben:

$$\begin{aligned} G\Big(\chi(i\omega)u, u\Big) &= \frac{1}{|\delta(i\omega)|^2} G\Big(\delta(i\omega)\chi(i\omega)u, \delta(i\omega)u\Big) \qquad (1.7)\\ &= \frac{1}{|\delta(i\omega)|^2} u^* \underbrace{\begin{pmatrix} \delta(i\omega)\chi(i\omega) \\ \delta(i\omega) I \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} G_0 & G_1 \\ G_1^* & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta(i\omega)\chi(i\omega) \\ \delta(i\omega) I \end{pmatrix}}_{=:\, \Phi(i\omega)} u. \end{aligned}$$

Für Lösungen gemäß (1.5) gilt aber $Ax + Bu = \dot{x} = i\omega x$, somit verschwindet in (1.4) der erste Summand für beliebige hermitesche H, und als notwendige Bedingung für die Erfüllbarkeit von (1.4) erhalten wir:

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \ \text{ mit } \ \delta(i\omega) \neq 0, \quad \forall u \in \mathbb{K}^n \quad : \quad G\Big(\chi(i\omega)u, u\Big) \geq 0, \tag{1.8}$$

also mit der in (1.7) eingeführten Funktion Φ

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad : \quad \Phi(i\omega) \geq 0. \tag{1.9}$$

Man bezeichnet eine solche Bedingung als Frequenzbedingung. Der Frequenzsatz besagt, daß diese Frequenzbedingung für kontrollierbare Systeme tatsächlich sogar hinreichend für die Existenz eines gewünschten $H = H^*$ ist, d.h. für die asymptotische Stabilität des Systems. Ein Vorteil solcher Frequenzkriterien ist, daß sie sich experimentell durch Anregung eines gegebenen (physikalischen) Systems mit verschiedenen Frequenzen überprüfen lassen.

1.3 Der Frequenzsatz

Wir stellen nun die jeweiligen Fassungen des Frequenzsatzes gemäß Jakubovich und Rantzer vor. Beide sind im wesentlichen äquivalent.
In [Jak73] wird der Frequenzsatz als Äquivalenz dreier Aussagen formuliert.

Satz 1.1 *Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{K}^{p\times n}$ und $G : \mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ eine hermitesche Form. Das Paar (A,B) sei kontrollierbar.*
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) : Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ mit $i\omega \notin \sigma(A)$ und alle $u \in \mathbb{K}^m$ ist $G\Big(C(i\omega I - A)^{-1}Bu, u\Big) \geq 0$.

(b) : Es existiert eine hermitesche Matrix $H \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so daß gilt:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, u \in \mathbb{K}^m : \quad 2\mathrm{Re}\, x^* H(Ax + Bu) - G(Cx, u) \leq 0. \tag{1.10}$$

(c) : Es existieren $H = H^* \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $h \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\kappa \in \mathbb{K}^{m\times m}$, so daß gilt:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, u \in \mathbb{K}^m : \quad 2\mathrm{Re}\, x^* H(Ax + Bu) - G(Cx, u) = -\Big|h^* x + \kappa u\Big|^2. \tag{1.11}$$

Interessant ist insbesondere die Äquivalenz von (a) und (b), wobei wir bereits nachgewiesen haben, daß (a) aus (b) folgt. Daß (b) von (c) impliziert wird, ist offensichtlich. Andererseits weist (c) bereits den Weg für den Beweis und die Konstruktion der gesuchten hermiteschen Matrix, wie wir später sehen werden.

In der Arbeit [Ran96] wird der Frequenzsatz in folgender Form (allerdings nur in der reellen Fassung) bewiesen:

Satz 1.2 *Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $M = M^* \in \mathbb{K}^{(n+m)\times(n+m)}$. Das Paar (A, B) sei kontrollierbar und A habe keine imaginären Eigenwerte. Dann sind äquivalent*

(a) : Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix} (i\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix}^* M \begin{pmatrix} (i\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix} \leq 0.$

(b) : Es gibt ein $H = H^* \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so daß $M + \operatorname{Re}\begin{pmatrix} A^*H + HA & HB \\ B^*H & 0 \end{pmatrix} \leq 0.$

Im Falle strikter Ungleichungen gilt die Äquivalenz auch, wenn (A, B) nicht kontrollierbar ist.

Die Aussagen (a) und (b) aus Satz 1.1 lassen sich in die entsprechenden Aussagen in Satz 1.2 umformen, wenn man

$$M := -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} C^*G_0C & G_1 \\ G_1^* & \Gamma \end{pmatrix}$$

setzt. Wird zudem (A, B) als kontrollierbar vorausgesetzt, so kann nach dem Polzuweisungsprinzip ohne Einschränkung angenommen werden, daß A keine imaginären Eigenwerte hat, da sich die gesuchte Matrix H bei Rückkoppelungstransformationen nicht ändert.
Wir beweisen schon jetzt eine einfache aber wichtige Zusatzbehauptung:

Korollar 1.3 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.1(a). Außerdem seien $G_0 < 0$ und das Paar (A, C) beobachtbar. Dann gilt für die Matrix H aus (b) bzw. (c):*

$$\begin{array}{ll} H > 0, & \text{falls } \sigma(A) \subset \mathbb{C}_- \\ H < 0, & \text{falls } \sigma(A) \subset \mathbb{C}_+. \end{array}$$

Beweis: Wir betrachten in Satz 1.1 (b) den Fall $u = 0$, also die Ungleichung

$$HA + A^*H - C^*G_0C \leq 0.$$

Wegen $C^*G_0C \leq 0$ ist daher bekanntlich $H \geq 0$, falls $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$, und $H \leq 0$, falls $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^+$.
Es sei nun $x \in \operatorname{Kern} H$. Dann gilt

$$0 = x^*(HA + A^*H)x = x^*\Big(C^*G_0C\Big)x$$

und mit $G_0 < 0$ folgt insbesondere $x^*C^*G_0Cx = 0$, also $Cx = 0$ (d.h. $\operatorname{Kern} H \subset \operatorname{Kern} C$).
Damit folgt weiter

$$HAx = -A^*Hx + C^*G_0Cx = 0,$$

d.h. $\operatorname{Kern} H$ ist A-invariant.
Wäre $\operatorname{Kern} H \neq \{0\}$, so gäbe es zu A einen nichttrivialen Eigenvektor $x_0 \in \operatorname{Kern} H \subset \operatorname{Kern} C$. Dies widerspricht dem Hautus-Kriterium für Beobachtbarkeit. $\square$

2

Der Beweis des Frequenzsatzes nach Rantzer

Wir skizzieren die zentrale Idee im Beweis von Rantzer, ehe wir die technischen Details darlegen.
In Abschnitt 1.2 wurde benutzt, daß bei dem speziellen Eingang $u = u_0 e^{i\omega t}$ genau für die Lösungen $x = (i\omega I - A)^{-1}Bu$ der Realteil des Produktes $x^*(Ax + Bu) = 0$ verschwindet. Im Beweis von Rantzer wird ausgenutzt, daß auch der Realteil des vertauschten Produktes $x(Ax + Bu)^* \in \mathbb{K}^{n\times n}$ verschwindet. Ist daher q die Auswertung der hermiteschen Form aus (a) an einer Stelle (x, u) mit $x = (i\omega I - A)^{-1}Bu$, so besagt (a), daß das Paar $\left(q, \operatorname{Re} x(Ax + Bu)^*\right)$ in einer negativen Halbachse des Raumes $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n\times n}$ enthalten ist und insbesondere nicht die zugehörige (echt) positive Halbachse $]\,0, \infty\,[\, \times \{0_{n\times n}\}$ trifft. Darüberhinaus läßt sich zeigen, daß auch die konvexe Hülle aller genannten Paare diese positive Halbachse nicht trifft und folglich von dieser durch ein lineares Funktional getrennt werden kann. Dieses Funktional wird durch ein Element $(1, H) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n\times n}$ dargestellt, wobei sich herausstellt, daß H die gesuchte Matrix ist.
Das matrizentheoretische Fundament für den skizzierten Beweis liefern folgendes elementare Lemma und seine Korollare.

Lemma 2.1 *Es seien S und T komplexe Matrizen gleicher Größe. Es gilt $SS^* = TT^*$ genau dann, wenn eine unitäre Matrix U existiert, so daß $S = TU$.*

Beweis: Es ist klar, daß die Beziehung $S = TU$ mit $U^*U = I$ die Gleichheit $SS^* = TT^*$ impliziert. Wir zeigen die Umkehrung. Wegen

$$\operatorname{Kern} S^* \;=\; \operatorname{Kern} SS^* \;=\; \operatorname{Kern} TT^* \;=\; \operatorname{Kern} T^*$$

gibt es eine unitäre Matrix R, deren letzte Spalten den (Rechts-)Kern von S^* und T^* aufspannen, so daß

$$S^*R = \left(S_1^*\,,\, 0\right) \quad \text{und} \quad T^*R = \left(T_1^*\,,\, 0\right).$$

Außerdem existieren unitäre Matrizen L_S und L_T, deren letzte Zeilen die jeweiligen Linkskerne aufspannen, so daß

$$L_S S^* R = \begin{pmatrix} S_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_T T^* R = \begin{pmatrix} T_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

mit nichtsingulären Matrizen S_{11} und T_{11} gleicher Größe. Wir setzen $\tilde{U} := T_{11}^*\left(S_{11}^*\right)^{-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} T^* &= L_T^* \begin{pmatrix} T_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R^* = L_T^* \begin{pmatrix} \tilde{U} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R^* \\ &= L_T^* \begin{pmatrix} \tilde{U} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} L_S L_S^* \begin{pmatrix} S_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R^* = \underbrace{L_T^* \begin{pmatrix} \tilde{U} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} L_S}_{=:\, U^*} S^*. \end{aligned}$$

Es genügt nun zu zeigen, daß $\tilde{U}$ (und damit U) unitär ist. Dies folgt aus (2.1) wegen

$$\begin{pmatrix} S_{11}S_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R^*SS^*R = R^*TT^*R = \begin{pmatrix} S_{11}\tilde{U}\tilde{U}^*S_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Invertierbarkeit von S_{11}. □

Korollar 2.2 *Es seien S und T komplexe Matrizen gleicher Größe. Es gilt $ST^* + TS^* = 0$ genau dann, wenn eine unitäre Matrix U existiert, so daß*

$$S(I + U) = T(I - U).$$

Sind insbesondere $S, T \in \mathbb{C}^n$ Vektoren mit $T \neq 0$, so ist $U \neq -1$ eine komplexe Zahl vom Betrag 1, und es gilt

$$S = \frac{I + U}{I - U} T = i\omega T \tag{2.2}$$

mit einem $\omega \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wegen

$$(T \pm S)(T \pm S)^* = TT^* \pm ST^* \pm TS^* + SS^*$$

ist $ST^* + TS^* = 0$ äquivalent zu

$$(T - S)(T - S)^* = (T + S)(T + S)^*,$$

und nach Lemma 2.1 ist dies äquivalent zu der Existenz einer unitären Matrix U mit $(T - S) = (T + S)U$ also $S(I + U) = T(I - U)$ wie behauptet. □

Das nächste Korollar spielt eine entscheidende Rolle im Beweis des Frequenzsatzes.

Korollar 2.3 *Es seien S und T komplexe Matrizen gleicher Größe. Für eine positiv semidefinite Matrix $W \in \mathbb{C}^{r \times r}$ (mit passendem r) gelte*

$$SWT^* + TWS^* = 0. \tag{2.3}$$

Dann hat W die Gestalt

$$W = \sum_{j=1}^{r} w_j w_j^*, \qquad \text{wobei für alle } j \text{ gilt} \quad Sw_jw_j^*T^* + Tw_jw_j^*S^* = 0. \tag{2.4}$$

Beweis: Mit Hilfe der (hermiteschen) Quadratwurzel von W schreiben wir Voraussetzung (2.3) als

$$0 \;=\; SW^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}T^* + TW^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}S^* \;=\; SW^{\frac{1}{2}}\left(TW^{\frac{1}{2}}\right)^* + TW^{\frac{1}{2}}\left(SW^{\frac{1}{2}}\right)^*.$$

Aus Korollar 2.2 folgt die Existenz einer unitären Matrix U, so daß

$$SW^{\frac{1}{2}}(I+U) \;=\; TW^{\frac{1}{2}}(I-U).$$

Da alle Eigenwerte von U den Betrag 1 haben, läßt sich U darstellen als

$$U = \sum_{j=1}^{r} U_j u_j u_j^* \quad \text{mit} \quad u_j \in \mathbb{C}^r \text{ und } U_j \in \mathbb{C},\ |U_j| = 1.$$

Setzt man nun $w_k := W^{\frac{1}{2}}u_j$, so ist $W = \sum_{j=1}^{r} w_j w_j^*$, und es gilt

$$Sw_j(1+U_j) \;=\; SW^{\frac{1}{2}}(I+U)u_k \;=\; TW^{\frac{1}{2}}(I-U)u_j \;=\; Tw_j(1-U_j).$$

Damit ist entweder $Sw_j = 0$, oder Sw_j ist ein imaginäres Vielfaches von Tw_j. In beiden Fällen folgt (2.4). □

Beweis von Satz 1.2:
Wir werden (a) durch eine Kette äquivalenter Umformulierungen in (b) umformen.
Nach (a) besteht die Ungleichung

$$q(x,u) := \left(x^*, u^*\right) M \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \le 0$$

für alle Paare (x,u) mit $x = (i\omega I - A)^{-1}Bu$, was gleichbedeutend ist mit $Ax + Bu = i\omega x$.
Nach Korollar 2.2 ist letztere Bedingung äquivalent dazu, daß gilt

$$S(x,u) := x(Ax+Bu)^* + (Ax+Bu)x^* = 0 \;\in\; \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Es ist also $q(x,u) \le 0$, falls $S(x,u) = 0$, und (a) läßt sich äquivalent so schreiben:

$$\underbrace{\left\{ \left(q(x,u), S(x,u)\right) \;\middle|\; (x,u) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \right\}}_{= \text{Bild}\,(q,S)} \cap \underbrace{]\,0,\infty\,[\times \left\{0_{n\times n}\right\}}_{\overset{\text{(kurz)}}{=}\ ]\,0,\infty\,[} \;=\; \emptyset. \tag{2.5}$$

Wir zeigen nun, daß in (2.5) Bild (q,S) durch seine konvexe Hülle ersetzt werden kann, daß also gilt

$$\text{conv Bild}\,(q,S) \cap\ ]\,0,\infty\,[\;=\; \emptyset. \tag{2.6}$$

Wegen $\lambda^2\big(q(x,u), S(x,u)\big) = \big(q(\lambda x, \lambda u), S(\lambda x, \lambda u)\big)$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$, läßt sich jede Konvexkombination K von Elementen aus Bild (q,S) mit passenden $(x_j, u_j) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$

und $\begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_N \\ u_1 & \cdots & u_N \end{pmatrix}$ folgendermaßen schreiben:

$$
\begin{aligned}
K &= \sum_{j=1}^{N} \Big(q(x_k, u_k), S(x_k, u_k) \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(\Big(x_j^*, u_j^* \Big) M \begin{pmatrix} x_j \\ u_j \end{pmatrix}, \ 2\mathrm{Re}\, x_j (A x_j + B u_j)^* \right) \qquad (2.7) \\
&= \left(\mathrm{Spur} \Big(X^*, U^* \Big) M \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}, \ 2\mathrm{Re} \Big(X X^* A^* + X U^* B^* \Big) \right) \\
&= \left(\mathrm{Spur} \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} \Big(X^*, U^* \Big) M, \ 2\mathrm{Re} \Big(I, 0 \Big) \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} \Big(X^*, U^* \Big) \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}
$$

Angenommen K läge in $]\,0, \infty\,[$, dann wäre einerseits

$$
\Big(I, 0 \Big) W \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} + \Big(A, B \Big) W \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{mit} \quad W := \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} \Big(X^*, U^* \Big),
$$

und nach Korollar 2.3 könnte ohne Einschränkung angenommen werden, daß in (2.7) bereits in jedem Summanden die zweite Komponente verschwindet.
Andererseits wäre für mindestens einen Summanden die erste Komponente positiv, und dieser Summand gehörte daher zu Bild $(q, S) \cap]\,0, \infty\,[$ im Widerspruch zu (2.5). Damit folgt die Äquivalenz von (2.6) und (a).
Aussage (2.6) ist ihrerseits äquvalent zu der Existenz eines nichttrivialen linearen Funktionals $l : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K}$, mit $\mathrm{Re}\, l \leq 0$ auf Bild (q, S) und $l \geq 0$ auf $]\,0, \infty\,[$. Es sei dieses Funktional definiert durch ein Element $(h, H) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n \times n}$ und das übliche (elementweise) Skalarprodukt, also

$$
l(q, S) := hq + \mathrm{Spur}\, HS.
$$

Wegen $S = S^*$ für $(q, S) \in$ Bild (q, S) kann H hermitesch gewählt werden. Mit $l \geq 0$ auf $]\,0, \infty\,[$ ist auch $h \geq 0$, und aus $\mathrm{Re}\, l \leq 0$ auf Bild (q, S) folgt für alle $(x, u) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$:

$$
\begin{aligned}
0 &\geq hq(x, u) + \mathrm{Re}\,\mathrm{Spur}\, HS(x, u) \\
&= h\Big(x^*, u^* \Big) M \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \mathrm{Re}\,\mathrm{Spur}\, H\Big(x(Ax + Bu)^* + (Ax + Bu)x^* \Big) \\
&= h\Big(x^*, u^* \Big) M \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \mathrm{Re}\, \Big(x^* A^* H x + u^* B^* H x + x^* H A x + x^* H B u \Big) \\
&= \Big(x^*, u^* \Big) \left(hM + \mathrm{Re} \begin{pmatrix} A^* H + HA & HB \\ B^* H & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß h nicht Null ist. An dieser Stelle kommt die Kontrollierbarkeit ins Spiel.
Wir nehmen $h = 0$ an. Transformiert man $\tilde{H} := UHU^{-1} = \mathrm{diag}\Big(H_{11}, 0 \Big)$, so daß H_{11} nichtsingulär ist, und entsprechend

$$
\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} := UAU^{-1}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} := UB, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} := Ux, \quad \tilde{u} = u,
$$

so ist auch $(\tilde{A}, \tilde{B})$ kontrollierbar, und Ungleichung (2.8) hat mit den neuen Größen die Gestalt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{u} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^* H_{11} + H_{11}\tilde{A}_{11} & H_{11}\tilde{A}_{12} & H_{11}\tilde{B}_1 \\ \tilde{A}_{21}^* H_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{B}_1^* H_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \\ &= \tilde{x}_1^* \left(\tilde{A}_{11}^* H_{11} + H_{11}\tilde{A}_{11} \right) \tilde{x}_1 + 2\mathrm{Re}\, \tilde{x}_1^* H_{11} \tilde{A}_{12} \tilde{x}_2 + 2\mathrm{Re}\, \tilde{x}_1^* H_{11} \tilde{B}_1 \tilde{u} \end{aligned}$$

für alle $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$. Daraus folgt $\tilde{A}_{12} = 0$ und $\tilde{B}_2 = 0$, wie man durch die Wahl

$$x_2 = \alpha \tilde{A}_{12}^* H_{11} x_1, \quad u = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad x_2 = 0, \quad u = \alpha \tilde{B}_2^* H_{11} x_1$$

für große $\alpha > 0$ erkennt. Dies widerspricht jedoch der Kontrollierbarkeit von $(\tilde{A}, \tilde{B})$. Also ist $h \neq 0$ und kann auf 1 normiert werden, so daß (b) äquivalent zu (2.8) ist.

Im Falle strikter Ungleichung kann man wie oben argumentieren. Bedingung (2.5) läßt sich dann schreiben als

$$\underbrace{\left\{ \left(q(x,u), S(x,u) \right) \;\middle|\; |x|^2 + |u|^2 = 1 \right\}}_{=: \, \mathrm{Bild}_0(q,S), \ \text{kompakt}} \cap \, [\, 0, \infty \, [\;=\; \emptyset.$$

Wie oben lassen sich die beiden Mengen links durch ein Funktional l trennen, und wegen der Kompaktheit von $\mathrm{Bild}_0(q, S)$ kann $\mathrm{Re}\, l$ echt negativ auf $\mathrm{Bild}_0(q, S)$ gewählt werden. Somit erhält man in (2.8) eine strikte Ungleichung für $(x, u) \neq (0, 0)$, und es folgen direkt $p \neq 0$ und die strikte Ungleichung in (b). □

3

Faktorisierungssätze für Matrixpolynome

Die Eleganz des im vorigen Kapitel vorgestellten Beweises von Rantzer tritt erst richtig zu Tage, wenn man sieht, welche aufwendigen technischen Mittel in frühere Beweise eingeflossen sind.
Das wichtigste solche Hilfsmittel in verschiedenen Beweisen des Kalman-Jakubovich-Lemmas (z.B. nach [Jak73] oder [Popov73]) ist ein Faktorisierungssatz für eine spezielle Klasse von Matrixpolynomen, welchen wir in diesem Abschnitt in einer recht allgemeinen Gestalt formulieren und beweisen wollen.
Mit Hilfe des Faktorisierungssatz läßt sich das ursprünglich quadratische Problem (1.4) auf ein lineares zurückführen, und die Art in welcher dies geschieht, bietet einen anderen konstruktiven Zugang zum Frequenzsatz. Darüberhinaus ist die Vorgehensweise auch auf andere Probleme übertragbar, so daß der Faktorisierungssatz von eigenständiger Bedeutung ist.

3.1 Formulierung der Faktorisierungssätze

Definition 3.1 *Es seien* $A_0, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *mit* $A_N \neq 0$. *Dann ist* $A(\lambda) := A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^N A_N$ **ein Matrixpolynom vom Grade** N, *d.h. eine Matrix deren Einträge Polynome vom Grade höchstens* N *über* $\mathbb{K}$ *sind. Wir setzen*

$$A(\lambda)^\nabla := A_0^* + (-\lambda)A_1^* + \ldots + (-\lambda)^N A_N^*,$$

d.h. die Koeffizientenmatrizen von $A(\lambda)^\nabla$ *sind hermitesch transponiert zu denen von* $A(\lambda)$ *und das Argument* λ *wird durch* $-\lambda$ *ersetzt. Wir schreiben auch* $A(\lambda)^\nabla = A^*(-\lambda)$, *wobei zu beachten ist, daß* $A^*(\lambda) \neq A(\lambda)^*$.
Gilt $A(\lambda)^\nabla \equiv A(\lambda)$, *so nennen wir* A **parahermitesch**. *Eine Transformation der Gestalt* $A \longrightarrow R^\nabla A R$ *bezeichnen wir als* **parahermitesche Transformation**, *und wenn zusätzlich gilt* $R \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$ *und* $\det R \equiv \text{const.} \neq 0$, *so nennen wir sie* **unimodular**. *Matrixpolynome, die durch parahermitesche Transformationen zusammenhängen, heißen* **kongruent** *bzw.* **unimodular kongruent**.

Wir formulieren nun den Faktorisierungssatz in der Form, wie er im Beweis des Kalman-Jakubovich-Lemmas benötigt wird:

Satz 3.2 *Es seien $A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$ ein parahermitesches Matrixpolynom und*

$$\det A(\lambda) = \psi(\lambda)^{\nabla}\psi(\lambda) \quad \textit{mit} \quad \psi(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$$

eine vorgegebene Faktorisierung der Determinanten von $A(\lambda)$. Eine Faktorisierung

$$A(\lambda) = R(\lambda)^{\nabla}R(\lambda) \quad \textit{mit} \quad R(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}, \quad \deg R(\lambda) = \frac{1}{2}\deg A(\lambda)$$

und

$$\det R(\lambda) = \psi(\lambda), \ \textit{falls}\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad \textit{bzw.} \quad \det R(\lambda) = \pm\psi(\lambda), \ \textit{falls}\ \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

existiert genau dann, wenn $A(\lambda)$ auf der imaginären Achse positiv semidefinit ist, also

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : \ A(i\omega) \geq 0. \tag{3.1}$$

Wir werden in der Tat ein allgemeineres Resultat beweisen als Satz 3.2, nämlich den Faktorisierungssatz von Gohberg, Lancaster und Rodman [GoLaRo82] für Matrixpolynome mit konstanter Signatur auf der imaginären Achse, der eine Verallgemeinerung des Sylvesterschen Trägheitssatzes für Matrixpolynome darstellt.

Satz 3.3 *Es seien $A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$ ein parahermitesches Matrixpolynom und*

$$\det A(\lambda) = \psi(\lambda)^{\nabla}\psi(\lambda) \quad \textit{mit} \quad \psi(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$$

eine vorgegebene Faktorisierung der Determinanten von $A(\lambda)$. Eine konstante Diagonalmatrix $J = \operatorname{diag}\Big(I_p, -I_{n-p}\Big) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und eine Faktorisierung

$$A(\lambda) = R(\lambda)^{\nabla}JR(\lambda) \quad \textit{mit} \quad R(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}, \tag{3.2}$$

und

$$\det R(\lambda) = \psi(\lambda), \ \textit{falls}\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad \textit{bzw.} \quad \det R(\lambda) = \pm\psi(\lambda), \ \textit{falls}\ \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

existieren genau dann, wenn $A(\lambda)$ auf der imaginären Achse außerhalb von Nullstellen von $A(\lambda)$ konstante Signatur hat, d.h.

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \ \textit{mit}\ \det A(i\omega) \neq 0 : \ \operatorname{sgn} A(i\omega) = 2p - n. \tag{3.3}$$

Es ist klar, daß eine Faktorisierbarkeit der Form (3.2) die Bedingung an die Signatur impliziert. Interessant ist die umgekehrte Beweisrichtung. Wir werden im Beweis induktiv zeigen, daß unter Bedingung (3.3) eine Faktorisierung $A(\lambda) = R^{\nabla}(\lambda)JR(\lambda)$ existiert, indem wir fortschreitend Nullstellen der Determinanten von $A(\lambda)$ nach rechts und links herausfaktorisieren. Um die Zusatzbedingung $\det R(\lambda) = \psi$ zu erfüllen, genügt es zu zeigen, daß genau die gemeinsamen Nullstellen von $\det A(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ nach rechts herausfaktorisiert werden können. Der Leitkoeffizient von $\det A(\lambda)$ kann dann entsprechend

justiert werden.
Desweiteren halten wir fest, daß im wesentlichen Satz 3.2 direkt aus Satz 3.3 folgt, da im positiv semidefiniten Fall J die Einheitsmatrix ist. Daß $R(\lambda)$ genau den halben Grad wie $A(\lambda)$ hat, folgt durch Betrachtung der Leitkoeffizienten. Offensichtlich ist $\deg R(\lambda) \geq \frac{1}{2} \deg A(\lambda)$. Wäre die Ungleichung echt, so müßte für den Leitkoeffizienten R_0 von $R(\lambda)$ gelten $R_0^* J R_0 = R_0^* R_0 = 0$, also $R_0 = 0$. Das ist ein Widerspruch. Im indefiniten Fall dagegen kann auch für $R_0 \neq 0$ gelten $R_0^* J R_0 = 0$, deshalb bekommen wir in Satz 3.3 keine Gradabschätzung für $\det R(\lambda)$. Dies ist einer der Gründe, wieso sich das Kalman-Jakubovich-Lemma nicht allgemein auf den indefiniten Fall übertragen läßt.
Den Beweis von Satz 3.3 führen wir nach Dokovic [Dok93] als Induktionsbeweis über den Grad der Determinanten von $A(\lambda)$. Der Beweis in [GoLaRo82] arbeitet mit Störungen von $A(\lambda)$ und benötigt aufwendige Konvergenzuntersuchungen. Ein kurzer Beweis stammt auch von Clements.
Wir benötigen Hilfsmittel aus der Theorie der Invariantenteiler einer Matrix und die Smithsche Normalform, die hier ohne Beweise angegeben werden. Man sehe z.B. [Gan86].

Definition 3.4 *Es sei eine Polynommatrix $A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$ vom Rang r gegeben, das heißt $A(\lambda)$ hat einen nicht identisch verschwindenden Minor der Ordnung r. Für $1 \leq j \leq r$ sei $D_j(\lambda)$ der größte gemeinsame Teiler (dessen Leitkoeffizient zu 1 normiert sei) aller Minoren j-ter Ordnung von $A(\lambda)$. Die $D_j(\lambda)$ heißen auch* **Determinantenteiler** *(j-ter Ordnung). Nach dem Entwicklungssatz für Determinanten ist jeder Minor $(j+1)$-Ordnung darstellbar als Summe von Minoren j-ter Ordnung. Folglich teilt jeder Determinantenteiler alle Determinantenteiler höherer Ordnung. Die Quotienten sind die sogenannten* **Invariantenteiler** *von $A(\lambda)$:*

$$i_j(\lambda) := \frac{D_{r-j+1}}{D_{r-j}} \quad \text{für } 1 \leq j \leq r, \tag{3.4}$$

wobei $D_0 \equiv 1$ gesetzt wird.

Wir fassen einige Resultate aus der Theorie der Invariantenteiler zusammen:

Satz 3.5 *Es seien $A(\lambda)$ und $i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$ wie in der Definition.*

1. *Sind $P(\lambda)$ und $Q(\lambda)$ Matrixpolynome mit konstanter, von Null verschiedener Determinanten, so hat $B(\lambda) := P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$ dieselben Invariantenteiler wie $A(\lambda)$.*

2. *Es gibt Polynommatrizen $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ mit $\det P(\lambda) \equiv 1$, $\det Q(\lambda) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, so daß*
$$A(\lambda) = P(\lambda) \underbrace{\operatorname{diag}\Big(i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda), 0, \ldots, 0\Big)}_{=:\, D(\lambda)} Q(\lambda). \tag{3.5}$$
Die Diagonalmatrix $D(\lambda)$ heißt **Smithsche Normalform** *von $A(\lambda)$.*

3. *Jeder Invariantenteiler teilt alle Invariantenteiler höherer Ordnung.*

4. *Insbesondere sind $P(\lambda)$, $D(\lambda)$ und $Q(\lambda)$ reell, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*

Die Idee für den Induktionsanfang im angekündigten Beweis von Satz 3.2 liegt in einer Verallgemeinerung des Begriffes der (konstanten) Diagonalmatrix für Matrixpolynome und in einem Lemma, das auf Ljubachevskij zurückgeht.

3.2 Ein Lemma von Ljubachevskij

Wir verschaffen uns in diesem Abschnitt eine gewisse Normalform für beliebige parahermitesche Matrixpolynome. Diese wird in der Aussage von Lemma 3.7 beschrieben. Erstmals bewiesen wurde dieses Lemma in [Lju72], jedoch ist der dortige Beweis sehr schwammig. Zudem verwendet Jakubovich das Lemma in [Jak70] ohne exakte Literaturangabe, weshalb unter anderen Coppel in [Coppel72] einen neuen Beweis veröffentlichte. Eine Hauptschwierigkeit beim Beweis des Lemmas scheint zu sein, die gesamte Argumentation mit vollständiger Fallunterscheidung übersichtlich zu formulieren. Wir geben unten eine gestraffte formale Darstellung des Beweises von Ljubachevskij.

Definition 3.6 *Ein Matrixpolynom $A(\lambda) = \big(a_{jk}(\lambda)\big) \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$ hat eine* **dominante Diagonale**, *wenn gilt*

$$\forall j \neq k \text{ mit } 1 \leq j, k \leq n \ : \quad \deg a_{kj}(\lambda) < \deg a_{kk}(\lambda).$$

Dabei definieren wir den Grad des Nullpolynoms zu -1.

Wir zeigen nun, daß sich jedes parahermitesche Matrixpolynom, dessen Determinante konstant und verschieden von Null ist, durch unimodulare Transformationen im Sinne obiger Definition 3.1 auf eine konstante Diagonalmatrix transformieren läßt. Dazu benötigen wir das Lemma von Ljubachevskij.

Lemma 3.7 *Jedes parahermitesche Matrixpolynom $A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$ läßt sich durch eine unimodulare parahermitesche Transformation*

$$A(\lambda) \longrightarrow B(\lambda) = \big(b_{ij}(\lambda)\big) := R(\lambda)^{\nabla} A(\lambda) R(\lambda)$$

so transformieren, daß für $B(\lambda)$ entweder gilt (a) $b_{11} \equiv 0$, oder (b) die Diagonale von $B(\lambda)$ ist dominant und dem Grade nach aufsteigend geordnet:

$$0 \leq \deg b_{11}(\lambda) \leq \ldots \leq \deg b_{nn}(\lambda).$$

Beweis: Wir legen zunächst einige Bezeichnungen und Schreibweisen fest. Das Argument λ lassen wir ab jetzt weg. Für $i \neq j$ definieren wir die **Irregularität** von a_{ij} als

$$\rho(a_{ij}) := \deg a_{ij} - \deg a_{ii}$$

und nennen a_{ij} **regulär**, falls $\rho(a_{ij}) < 0$. Entsprechend heiße ein beliebiger Block von A regulär, falls alle Einträge außerhalb der Diagonalen regulär sind. Als **Regularisierung** eines Eintrages a_{ij} mit $i \neq j$ bezeichnen wir folgende unimodulare Transformation:
Es sei q der Quotient der Division mit Rest von a_{ij} durch a_{ii}. Dann werde von der j-ten Spalte das q-fache der i-ten Spalte und von der j-ten Zeile das q^∇-fache der i-ten Zeile abgezogen. Die Regularisierung ist definiert, falls $a_{ii} \not\equiv 0$ und wird beschrieben durch

$$B := R^\nabla A R \text{ mit } R := I - q\Big(\delta_{ik}\delta_{jl}\Big)_{k,l=1}^{n} \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}.$$

Offensichtlich ist sie unimodular und hat zur Folge, daß gilt $\deg b_{ij} < \deg b_{ii}$.
Als weitere Klasse elementarer unimodularer Transformationen werden solche verwandt, die durch Permutationsmatrizen bewerkstelligt werden und insbesondere zwei Zeilen, sowie die zwei entsprechenden Spalten jeweils miteinander vertauschen.
Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis:

1.Schritt: Es seien $a_{11} \not\equiv 0$ und die s-te Hauptuntermatrix $A^{(s)} := A^{1,2,\ldots,s}_{1,2,\ldots,s}$ regulär (dann gilt insbesondere $a_{ii} \not\equiv 0$ für $1 \leq i \leq s$). Wir zeigen, daß sich dann der Block $\Big(A^{(s)}, A_1^{(s)}\Big)$ der ersten s Zeilen von A regularisieren läßt:
Es gebe in $A_1^{(s)}$ eine Anzahl $m > 0$ von Einträgen der maximalen Irregularität $z \geq 0$. Einer dieser sei a_{ik} mit $1 \leq i \leq s$, $s < k \leq n$. Die Regularisierung von a_{ik} ist möglich wegen $\deg a_{ii} \geq 0$ und wirkt sich innerhalb der ersten s Zeilen nur auf die k-te Spalte aus. Es sei a_{jk} mit $i \neq j \leq s$ ein weiterer Eintrag dieser Spalte. Dieser wird durch die Regularisierung von a_{ik} überführt in $a_{jk} + qa_{ji}$, wobei $\deg q = z$ (mit $a_{ik} = qa_{ii}$+Rest). Wegen $i, j \leq s$ ist a_{ij} als Eintrag von $A^{(s)}$ regulär. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\deg(a_{jk} + qa_{ji}) - \deg a_{jj} &\leq \max\{\deg a_{jk}, z + \deg a_{ji}\} - \deg b_{ii} \\ &\leq \max\{\rho(a_{jk}), z - 1\},\end{aligned}$$

d.h. durch die Transformation entstehen keine neuen Einträge der Irregularität z, und nach spätestens $s(n-s)(z+1)$ Regularisierungen sind die ersten s Zeilen regulär.

2.Schritt: Wir bezeichnen A als s-regulär (für $s \geq 0$), falls die ersten s Zeilen regulär sind und

$$0 \leq \deg a_{11} \leq \ldots \leq \deg a_{s+1,s+1}. \tag{3.6}$$

Es sei A nicht unimodular kongruent zu einer Matrix B mit $b_{11} \equiv 0$. Dann ist A insbesondere (mindestens) 0-regulär, und es gibt ein maximales $\hat{s} = \hat{s}(A) \geq 0$, so daß A auch $\hat{s}$-regulär ist. Wir ordnen nun A einen $n+1$-dimensionalen Bewertungsvektor φ zu:

$$\varphi(A) := \Big(\deg a_{11}, \ldots, \deg a_{\hat{s}+1,\hat{s}+1}, \infty, \ldots, \infty\Big) \in \{0, 1, \ldots, \infty\}^{n+1},$$

wobei formal gelte $\deg a_{n+1,n+1} = \infty$. Auf $\{0, 1, \ldots, \infty\}^{n+1}$ betrachten wir die lexikographische Ordnung. Bezüglich dieser gibt es zu A eine unimodular kongruente Matrix mit minimaler Bewertung. Ohne Einschränkung sei dies A selbst.
Wir zeigen nun, daß gilt $\hat{s}(A) = n$ (was impliziert, daß A dominante, geordnete Diagonale

hat), indem wir das Gegenteil annehmen: $\hat{s} = \hat{s}(A) < n$.
Wegen $A = A^\nabla$ ist nach Voraussetzung $A^{(\hat{s}+1)}$ regulär (deshalb tritt der Fall $\hat{s} = n-1$ nicht auf), und nach dem ersten Beweisschritt lassen sich die ersten $\hat{s}+1$ Zeilen von A regularisieren. Es sei B die transformierte Matrix (mit $B^{(\hat{s}+1)} = A^{(\hat{s}+1)}$).
Wir unterscheiden zwei Fälle:
Entweder ist $\deg b_{\hat{s}+2,\hat{s}+2} \geq \deg b_{\hat{s}+1,\hat{s}+1}$; dann ist B mindestens $(\hat{s}+1)$-regulär und

$$\underbrace{\Big(\deg a_{11}, \ldots, \deg a_{\hat{s}+1,\hat{s}+1}, \infty, \ldots, \infty\Big)}_{=\varphi(A)} > \underbrace{\Big(\deg a_{11}, \ldots, \deg a_{\hat{s}+1,\hat{s}+1}, \deg b_{\hat{s}+2,\hat{s}+2}, \ldots\Big)}_{=\varphi(B)}.$$

Oder es gilt $\deg b_{\hat{s}+2,\hat{s}+2} < \deg b_{jj}$ für ein minimal gewähltes $j \leq \hat{s}+1$. Durch Vertauschen von j-ter und $\hat{s}+2$-ter Zeile und Spalte in B werden die ersten $j-1$ Spalten nicht verändert und B geht über in eine j-reguläre Matrix $\tilde{B}$ mit

$$\underbrace{\Big(\deg a_{11}, \ldots, \deg a_{jj}, \ldots\Big)}_{=\varphi(A)} > \underbrace{\Big(\deg a_{11}, \ldots, \deg a_{j-1,j-1}, \deg b_{\hat{s}+2,\hat{s}+2}, \ldots\Big)}_{=\varphi(\tilde{B})}.$$

Beide Fälle widersprechen daher der Minimalität von $\varphi(A)$. □

Mit Hilfe des bewiesenen Lemmas von Ljubachevskij können wir nun leicht ein Kriterium beweisen, wann $A(\lambda)$ unimodular kongruent zu einem Matrixpolynom mit dominanter Diagonalen ist:

Lemma 3.8 *Es sei* $A(\lambda) = A(\lambda)^\nabla \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$ *und* $\det A(\lambda) \equiv \text{const} \neq 0$. *Dann ist* $A(\lambda)$ *unimodular kongruent zu einem Matrixpolynom* $B(\lambda)$ *mit dominanter Diagonalen.*

Beweis: Wir wenden Lemma 3.7 an. Tritt der Fall (b) ein, so ist die Behauptung gezeigt, andernfalls sei ohne Einschränkung $a_{11} \equiv 0$, und A und A^{-1} haben folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^\nabla \\ a & \hat{A} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & n^\nabla \\ n & N \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen, daß in diesem Falle A unimodular kongruent zu einem Matrixpolynom B der Gestalt $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{B} \end{pmatrix}$ ist. Auf $\hat{B}$ ist dann wieder Lemma 3.7 anwendbar, und nach maximal n Anwendungen des Lemmas erhalten wir das Gewünschte.
Wir machen für die Transformation folgenden Ansatz

$$R := \begin{pmatrix} \xi & n^\nabla \\ r & I \end{pmatrix}, \text{ also } RAR^\nabla = \begin{pmatrix} \beta & b^\nabla \\ b & \hat{B} \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{cases} \beta = \xi^\nabla + \xi + n^\nabla \hat{A} n \\ b = \xi^\nabla a + \hat{A} n + r\,. \end{cases}$$

Setzen wir $\xi^\nabla = \xi := \frac{1}{2}(1 - n^\nabla \hat{A} n)$ und $r := -\Big(\xi^\nabla a + \hat{A} n\Big)$, so folgt offensichtlich $\beta = 1$ und $b = 0$. Außerdem verifiziert man (z.B. durch Entwicklung nach der ersten Spalte), daß gilt

$$\det R = \xi - n^\nabla r = 2\xi + n^\nabla \hat{A} n \equiv 1.$$

Die Transformation ist also unimodular. □

Tatsächlich liegt eine viel speziellere Situation vor, als das Lemma aussagt:

Korollar 3.9 *Das Matrixpolynom $B(\lambda)$ aus dem Lemma ist sogar konstant, diagonal und hermitesch (und damit reell).*
Ohne Einschränkung ist also $B = \operatorname{diag}\left(I_k, I_{n-k}\right)$.

Beweis: Da B dominante Diagonale hat, ist der führende Term von $\det B$ auch der führende Term des Polynoms $b_{11}b_{22}\dots b_{nn}$, d.h. $\deg(\det B) = \deg(b_{11}b_{22}\dots b_{nn})$, und da $\det B = \det A$ konstant ist, ist aber $\deg(\det B) = 0$ und somit auch $\deg b_{ii} = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Alle Einträge von B außerhalb der Diagonalen verschwinden daher, und B ist eine konstante Diagonalmatrix. Folglich ist auch $B = B^\nabla = B^*$, wie behauptet. □

3.3 Beweis der Faktorisierungssätze

Für den Beweis nach Dokovic benötigen wir noch ein einfaches Lemma:

Lemma 3.10 *Es sei*

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & \phi(\lambda)B(\lambda) \\ \bar{\phi}(-\lambda)B(\lambda)^\nabla & \phi(\lambda)C(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$$

ein parahermitesches Matrixpolynom in λ, wobei $A(0)$ und $C(0)$ nichtsinguläre Matrizen seien und ϕ ein Polynom mit $\phi(0) = 0$. Dann gilt für hinreichend kleine $\omega \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn} H(i\omega) = \operatorname{sgn} A(0) + \operatorname{sgn}\Big(\phi(i\omega)C(0)\Big). \tag{3.7}$$

Beweis: Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $\omega = 0$. Zwei hermitesche Matrizen haben (z.B. nach [Grö66], S.229) insbesondere dann dieselbe Signatur, wenn jeweils ihre Hauptminoren gleicher Ordnung dasselbe Vorzeichen haben (es reicht bereits die gleiche Anzahl von Vorzeichenwechseln in den Folgen der Hauptminoren). Kennzeichnen wir eine Hauptuntermatrix k-ter Ordnung durch hochgestelltes k, so ist also zu zeigen, daß für alle $k = 1, \dots, n$ und kleine ω gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\det H(i\omega)^{(k)} &= \operatorname{sgn}\det \begin{pmatrix} A(i\omega) & 0 \\ 0 & \phi(i\omega)C(i\omega) \end{pmatrix}^{(k)} \\ &= \operatorname{sgn}\det \begin{pmatrix} A(0) & 0 \\ 0 & \phi(i\omega)C(0) \end{pmatrix}^{(k)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die zweite Gleichung folgt hierbei für kleine ω aus der Regularität von $A(0)$ und $C(0)$. Ist m die Dimension von A, so ist für $k \leq m$ wegen $H^{(k)} = A^{(k)}$ die Aussage klar. Für $k = m + s > m$ ist

$$\begin{aligned} \det H(i\omega)^{(k)} &= \det \begin{pmatrix} A(i\omega) & \phi(i\omega)\tilde{B}(i\omega) \\ \phi(-i\omega)\tilde{B}(i\omega)^{\nabla} & \phi(i\omega)C(i\omega)^{(s)} \end{pmatrix} \quad \text{(mit geeigneten Untermatrizen } \tilde{B} \text{ von } B) \\ &= \phi(i\omega)^s \det A(i\omega)\, \det C(i\omega)^{(s)} + \mathcal{O}\left(|\phi(i\omega)|^{s+1}\right). \end{aligned}$$

Da $\det A(0)$ und $\det C(0)$ nicht verschwinden, ist daher

$$\operatorname{sgn} \det H(i\omega)^{(k)} = \operatorname{sgn}\left(\phi(i\omega)^s \det A(i\omega)\, \det C(i\omega)^{(s)}\right)$$

für kleine ω, was (3.8) impliziert. □

Beweis der Sätze 3.2 und 3.3:
Wie erwähnt ist Satz 3.2 ein Spezialfall von Satz 3.3, und letzterer wird per Induktion über den Grad der Determinanten von A bewiesen.
Den Induktionsanfang mit $\deg\det A = 0$ liefert uns Korollar 3.9, und wir setzen nun voraus, daß für $N > 0$ die Behauptung für $\deg\det A < N$ wahr ist.
Für $\deg\det A = N$ betrachten wir die Smithsche Normalform (3.5) aus Satz 3.5

$$A(\lambda) = P(\lambda)\operatorname{diag}\Big(i_1(\lambda), \ldots, i_n(\lambda)\Big)Q(\lambda) \quad \text{mit} \quad i_k | i_{k+1} \text{ für } k = 1, \ldots, n-1.$$

Wegen $\deg\det A > 0$ ist i_n nicht konstant und besitzt eine Wurzel λ_0. Ist die Determinante von R als Polynom ψ vorgegeben (mit $\psi^{\nabla}\psi = \det A$) und $\psi(\lambda_0) = 0$, so transformieren wir $A \mapsto Q^{-\nabla}AQ^{-1}$, so daß ohne Einschränkung A von der Form $A = PD$ mit der Diagonalmatrix D ist; im Falle $\psi(\lambda_0) \neq 0$ ist $\psi^{\nabla}(\lambda_0) = 0$, und wir transformieren $A \mapsto P^{-1}AP^{-\nabla}$, so daß o.E. $A = DQ$.
Im ersten Fall ist die letzte Spalte von A, im zweiten die letzte Zeile von A durch $\lambda - \lambda_0$ teilbar, und wegen $A = A^{\nabla}$ ist entsprechend entweder die letzte Zeile oder Spalte von A auch durch $-(\lambda - \lambda_0)$ teilbar.
Wir werden im folgenden zeigen, daß $A(\lambda)$ eine Faktorisierung $A(\lambda) = R^{\nabla}(\lambda)A_{N-k}(\lambda)R(\lambda)$ zuläßt, wobei $\deg\det A_{N-k}(\lambda) = N - k < N$ und $\operatorname{ggT}\Big(\det R(\lambda), \psi(\lambda)\Big) = \det R(\lambda)$.
Der Einfachheit halber führen wir den Beweis zuerst für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und liefern die zusätzlichen Argumente für eine reelle Faktorisierung im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nach.
Im **einfachen Fall** ist entweder $\lambda_0 \neq -\bar{\lambda}_0$ oder λ_0 doppelte Wurzel von i_n, und wir haben eine Faktorisierung

$$A(\lambda) = R_N(\lambda)^{\nabla}A_{N-2}(\lambda)R_N(\lambda) \tag{3.9}$$

mit

$$R_N(\lambda) = \operatorname{diag}\Big(1, \ldots, 1, \lambda - \lambda_0\Big) \quad \text{oder} \quad R_N(\lambda) = \operatorname{diag}\Big(1, \ldots, 1, \lambda - (-\bar{\lambda}_0)\Big).$$

Offensichtlich ist $\deg\det A_{N-2}(\lambda) = N-2$, und A_{N-2} genügt den Voraussetzungen des Satzes, so daß es nach der Induktionsvoraussetzung eine Faktorisierung $A_{N-2} = R_{N-2}^{\nabla}JR_{N-2}$ gibt mit $\det R_{N-2}\det R_N = \psi$ und J wie gewünscht.
Für den **schwierigeren Fall**, daß $\lambda_0 = i\omega_0$ imaginär und nur eine einfache Nullstelle von

i_n ist, benötigen wir die Voraussetzung an die Signatur von A und Lemma 3.10.
Die Matrix $A(\lambda_0)$ habe Rang $r < n$. Dann verschwinden in D die letzten $n-r$ Zeilen und Spalten, und $A(\lambda_0) = A(\lambda_0)^\nabla$ ist somit von der Form $A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} A^{(r)}(\lambda_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Als Polynommatrix hat $A(\lambda)$ daher die Gestalt

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} A^{(r)}(\lambda) & (\lambda-\lambda_0)B(\lambda) \\ -(\lambda-\lambda_0)B(\lambda)^\nabla & (\lambda-\lambda_0)C(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, daß die hermitesche Matrix $iC(\lambda_0)$ nicht definit ist, indem wir zunächst das Gegenteil annehmen. Insbesondere ist $C(\lambda_0)$ dann nichtsingulär, und nach Lemma 3.10 gilt für betragsmäßig kleine $\omega - \omega_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} A(i\omega) &= \operatorname{sgn} A^{(r)}(i\omega_0) + \operatorname{sgn}\Big(i(\omega-\omega_0)C(i\omega_0)\Big) \\ &= \operatorname{sgn} A^{(r)}(i\omega_0) + \operatorname{sgn}(\omega-\omega_0)\operatorname{sgn} iC(i\omega_0) \end{aligned}$$

Da andererseits $\operatorname{sgn} A(i\omega)$ auf $i\mathbb{R}$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte konstant ist, kann die Matrix $iC(i\omega_0)$ entgegen der Annahme nicht definit sein.
Es existiert daher ein Vektor $v \in \mathbb{C}^{n-r}$, $|v| = 1$ mit $v^*C(\lambda_0)v = 0$, d.h. das Polynom $v^*C(\lambda)v = 0$ ist durch $\lambda - \lambda_0$ teilbar. Wir setzen $v_1 := \binom{0}{v} \in \mathbb{C}^n$, so daß $v_1^*A(\lambda)v_1 = (\lambda-\lambda_0)v^*C(\lambda)v = 0$ und $v_1^*A(\lambda_0) = A(\lambda_0)v_1 = 0$ wegen der Struktur von A.
Wir verwenden die Transformation $\tilde{A} := V^*AV$ mit einer regulären Matrix V (o.E. $\det V = 1$), deren erste Spalte v_1 ist. In $\tilde{A}(\lambda_0)$ sind sowohl die erste Zeile als auch die erste Spalte durch $\lambda - \lambda_0$ teilbar, und der erste Eintrag sogar durch $(\lambda-\lambda_0)^2$. Somit haben wir auch in diesem Fall eine Faktorisierung

$$\tilde{A}(\lambda) = R_N(\lambda)^\nabla A_{N-2}(\lambda) R_N(\lambda) \tag{3.10}$$

mit

$$R_N(\lambda) = \operatorname{diag}\Big(\lambda-\lambda_0, 1, \ldots, 1\Big)$$

und $\deg\det A_{N-2} = N-2$, so daß mit der Induktionsvoraussetzung die Behauptung folgt und der Satz für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bewiesen ist.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist zu beachten, daß mit jeder Wurzel λ_0 eines der Invariantenteiler auch die komplex konjugierte Zahl $\bar{\lambda}_0$ eine Wurzel desselben Invariantenteilers ist.
Wir gehen vor wie oben und betrachten zunächst den **einfachen Fall** und die Darstellung (3.9). Ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so ist die Faktorisierung reell. Andernfalls sei beispielsweise λ_0 Wurzel von ψ. Dann ist auch $\bar{\lambda}_0$ Wurzel sowohl von ψ als auch von i_n, und wir haben eine reelle Faktorisierung

$$A(\lambda) = \overline{R_N}(\lambda)^\nabla R_N(\lambda)^\nabla A_{N-4}(\lambda) R_N(\lambda)\overline{R_N}(\lambda)$$

(wobei in $\overline{R_N}(\lambda)$ nur die Koeffizienten, aber nicht das Argument konjugiert seien).
Im **schwierigeren Fall**, wenn $\lambda_0 = i\omega_0$ imaginäre einfache Nullstelle von i_n ist, ist insbesondere $\lambda_0 \neq 0$ wegen $i_n(\lambda) = i_n(\lambda)^\nabla \in \mathbb{R}[\lambda]$, d.h.

$$i_n(\lambda) = \prod_{j=0}^{k}(\lambda^2 + \omega_j^2) \quad \text{mit} \quad \omega_{j_1} \neq \omega_{j_2} \neq 0 \quad \text{für alle } j_1, j_2.$$

Hierbei sei $\lambda_0 = i\omega_0$ aus der Nullstellenmenge so gewählt, daß $A(\lambda_0)$ maximalen Rang r hat. Dann gilt $i_{r+1} = \ldots = i_n$.
Mit dem gleichen Argument wie oben können wir nun jeweils aus den letzten $n-r$ Spalten und Zeilen von $A(\lambda)$ den Faktor $i_n(\lambda)$ herausziehen:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} A^{(r)}(\lambda) & i_n(\lambda)B \\ i_n(\lambda)B^\nabla & i_n(\lambda)C \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

mit reellen konstanten Matrizen B und C.
Ebenfalls wie oben unter Verwendung von Lemma 3.10 und der konstanten Signatur von $A(i\omega)$ schließen wir, daß C nicht definit ist und somit ein Vektor $v \in \mathbb{C}^{n-r}$ existiert mit $v^*Cv = 0$. Für den Vektor $v_1 := \binom{0}{v} \in \mathbb{C}^n$ gilt dann wieder in allen Nullstellen $\tilde{\lambda}$ von i_n:

$$v_1^* A(\tilde{\lambda}) = 0\,, \quad A(\tilde{\lambda})v_1 = 0 \quad \text{und} \quad (\lambda - \tilde{\lambda})^2 \text{ teilt } v_1^* A(\lambda) v_1. \tag{3.12}$$

Wenn nun v reell gewählt werden kann, so betrachten wir wie oben die (reelle) Kongruenztransformation von $A(\lambda)$ mit einer Matrix $V = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
In $\tilde{A}(\lambda) := V^T A(\lambda) V$ sind die erste Zeile und die erste Spalte durch $\lambda^2 + \omega_0^2$ teilbar und der erste Eintrag sogar durch $\left(\lambda^2 + \omega_0^2\right)^2$, so daß sich nach links und rechts das reelle Matrixpolynom

$$R_N(\lambda)^\nabla = R_N(\lambda) = \operatorname{diag}\Big((\lambda^2 + \omega_0^2), 1, \ldots, 1\Big)$$

herausfaktorisieren läßt.
Wenn schließlich v echt komplex ist, so gelten die Gleichungen (3.12) auch mit $\bar{v}_1$ anstelle von v_1. Wir zerlegen daher v_1 in Real- und Imaginärteil

$$w_1 := \bar{v}_1 + v_1, \quad w_2 := i(\bar{v}_1 - v_1)$$

und betrachten die Kongruenztransformation $A \to \tilde{A} := W^T A W$ mit einer reellen Matrix $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. In $\tilde{A}(\lambda)$ sind wieder jeweils die ersten beiden Zeilen und Spalten durch $\lambda^2 + \omega_0^2$ teilbar, und der obere 2×2-Block ist

$$\tilde{A}(\lambda)^{(2)} = (w_1, w_2)^* A(\lambda)(w_1, w_2) = i_n(\lambda) \begin{pmatrix} v^TCv + \bar{v}^TC\bar{v} & 0 \\ 0 & -(v^TCv + \bar{v}^TC\bar{v}) \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $\zeta := v^TCv + \bar{v}^TC\bar{v} \in \mathbb{R}$ und $q(\lambda) := \dfrac{i_n(\lambda)}{\lambda^2 + \omega_0^2}$, dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\lambda)^{(2)} &= q(\lambda)\zeta \begin{pmatrix} \lambda^2 + \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & \omega_0 \\ \omega_0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q(\lambda)\zeta & 0 \\ 0 & q(\lambda)\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \omega_0 \\ \omega_0 & \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit erlaubt $\tilde{A}(\lambda)$ eine Faktorisierung

$$\tilde{A}(\lambda) = R_N(\lambda)^\nabla A_{N-4}(\lambda) R_N(\lambda) \quad \text{mit} \quad R(\lambda) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} -\lambda & \omega_0 \\ \omega_0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix};$$

man beachte hierbei, daß die ersten beiden Zeilen bzw. Spalten von $\tilde{A}(\lambda)$ das Matrixpolynom

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & \omega_0 \\ \omega_0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \omega_0 \\ \omega_0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega_0 \\ \omega_0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \omega_0 \\ \omega_0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

als Links- bzw. Rechtsfaktor besitzen.
Wegen $\deg \det A_{N-4} = N - 4$ folgt nun die Behauptung wieder mit der Induktionsvoraussetzung. $\square$

4

Der Beweis des Frequenzsatzes nach Jakubovich

Wir verwenden die Notation aus Abschnitt 1.2. Für den Beweis müssen wir die (parahermitesche) Fortsetzung von Φ auf die komplexe Ebene untersuchen; wir setzen für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\Phi(\lambda) := \begin{pmatrix} \delta(\lambda)\chi(\lambda) \\ \delta(\lambda)I \end{pmatrix}^{\nabla} \begin{pmatrix} G_0 & G_1 \\ G_1^* & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta(\lambda)\chi(\lambda) \\ \delta(\lambda)I \end{pmatrix} \in \mathbb{K}[\lambda]^{m\times m}. \tag{4.1}$$

Wegen $\deg \delta(\lambda)\chi(\lambda) < n$, und weil $\delta(\lambda)$ den Grad n hat, ist $\Phi(\lambda)$ ein Matrixpolynom, dessen Grad höchstens $2n$ ist.
Wir machen an dieser Stelle die (leicht) **einschränkende Voraussetzung, daß Φ invertierbar ist**, was insbesondere dann der Fall ist, wenn Γ invertierbar sind. Die Aussage des Frequenzsatzes ist unabhängig von dieser Voraussetzung, jedoch werden wir im Beweis die Inverse von Φ verwenden, während wir ohne die gemachte Voraussetzung mit Pseudoinversen arbeiten müßten, was gewisse technische Schwierigkeiten aufwirft.

4.1 Hilfssätze

Erfüllt das Matrixpolynom $\Phi(\lambda)$ Bedingung (1.9), so ist es nach Satz 3.2 parahermitesch faktorisierbar. Eine spezielle solche Zerlegung werden wir im Beweis des Frequenzsatzes verwenden; dafür benötigen wir noch einige Informationen über die Faktorisierbarkeit von $\det \Phi(\lambda)$.

Lemma 4.1 *Für das in (4.1) definierte Matrixpolynom Φ gilt:*

$$\det \Phi(\lambda) = \left(\delta(\lambda)^{m-1}\right)^{\nabla} \delta(\lambda)^{m-1}\phi(\lambda) \tag{4.2}$$

mit einem parahermiteschen Polynom $\phi(\lambda)$.

Wesentlich an dieser Aussage, die wir weiter unten beweisen werden, ist, daß sich das Nennerpolynom $\delta(\lambda)$ der Übertragungsmatrix $\chi(\lambda)$ aus $\det \Phi(\lambda)$ herausfaktorisieren läßt. Es

ist daher $\left(\delta(\lambda)^\nabla \delta(\lambda)\right)^{-1} \det \Phi(\lambda)$ eine rationale Funktion mit ϕ im Zähler und $\delta(\lambda)^\nabla\delta(\lambda)$ im Nenner.
Wir werden später benötigen, daß bei kontrollierbarem Paar (A, B) die Polynome $\delta(\lambda)$ und $\phi(\lambda)$ ohne Einschränkung als teilerfremd vorausgesetzt werden können. Deshalb zeigen wir, daß $\phi(\lambda)$ invariant unter Rückkoppelungstransformationen ist. Setzen wir

$$\tilde{u} := u + Fx \quad \text{und} \quad \tilde{A} = A - BF \quad \text{mit } F \in \mathbb{K}^{m\times n}, \tag{4.3}$$

so ist $A + Bu = \tilde{A} + B\tilde{u}$. Betrachten wir daher im transformierten System die hermitesche Form

$$\tilde{G}(y, \tilde{u}) := G(y, u) = G(y, u - Fx), \tag{4.4}$$

dann fallen Bedingung (1.4) und die entsprechende Bedingung für das transformierte System zusammen, so daß wir ohne Einschränkung die Matrix H für das transformierte System suchen können.

Zusatz zu Lemma 4.1 *Es seien $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\delta}$ und $\tilde{\phi}$ im transformierten System (4.3), (4.4) die jeweiligen Analoga der Größen im ursprünglichen System. Dann gilt*

$$\tilde{\phi} = \phi.$$

Dem Beweis des Lemmas schicken wir einen technischen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 4.2 *Für beliebige $b_0 \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $c_0 \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\Gamma_0 \in \mathbb{K}^{m\times m}$ sei*

$$\Sigma(\lambda) := \delta(\lambda)\left(c_0^* A_\lambda^{-1} b_0 + \Gamma_0\right).$$

Dann gilt

$$\det \Sigma(\lambda) = \delta(\lambda)^{m-1}\phi_0(\lambda),$$

wobei ϕ_0 ein Polynom mit $\deg \phi_0 \leq n$ ist.

Beweis: Es seien

$$U := \begin{pmatrix} I_n & -A_\lambda^{-1} b_0 \\ c_0^* & \Gamma_0 \end{pmatrix}, \quad V := \begin{pmatrix} I_n & A_\lambda^{-1} b_0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \quad W := \begin{pmatrix} A_\lambda + b_0 c_0^* & b(\Gamma_0 - I_m) \\ c_0^* & \Gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$UV = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ c_0^* & \delta^{-1}\Sigma \end{pmatrix}, \quad VU = \begin{pmatrix} A_\lambda^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} W,$$

und aus $\det UV = \det VU$ folgt

$$\det \delta^{-1}\Sigma = \det A_\lambda^{-1} \det W = \delta^{-1} \det W,$$

also

$$\det \Sigma = \delta^{m-1} \det W. \tag{4.5}$$

Wegen $\deg(\det W) \leq \deg(\det A_\lambda) = n$ folgt mit $\phi_0 := \det W$ die Behauptung. $\square$

Korollar 4.3 *Gilt speziell $\Gamma_0 = I_m$, so ist*

$$\det W = \det\Big(A_\lambda + b_0 c_0^*\Big) \quad \text{und} \quad \det \delta^{-1}\Sigma = \Big(c_0^* A_\lambda^{-1} b_0 + I_m\Big),$$

und aus (4.5) folgt

$$\det\Big(A_\lambda + b_0 c_0^*\Big) = \delta(\lambda)\det\Big(c_0^* A_\lambda^{-1} b_0 + I_m\Big). \tag{4.6}$$

Beweis von Lemma 4.1 mit Zusatz:
Nach der Formel von Cauchy-Binet läßt sich die Determinante eines $m \times m$-Matrizenproduktes (in dem nicht notwendigerweise jeder Faktor quadratisch ist) als Summe über Produkte der m-ten Minoren der Faktoren darstellen. Entsprechend der Definition von Φ in (4.1) ist also $\det\Phi$ eine Summe, bei der in jedem Summanden m-te Minoren sowohl von $\begin{pmatrix} \delta(\lambda)\chi(\lambda) \\ \delta(\lambda)I \end{pmatrix}$ als auch von $\begin{pmatrix} \delta(\lambda)\chi(\lambda) \\ \delta(\lambda)I \end{pmatrix}^\nabla$ als Faktoren auftreten. Deren Untermatrizen m-ter Ordnung sind aber genau von der Gestalt wie die Σ aus dem Hilfssatz, und mit diesem folgt, daß $\det\Phi$ eine Darstellung wie in (4.2) besitzt, wobei ϕ zwangsläufig parahermitesch ist.
Zum Nachweis der Invarianz von ϕ unter Zustandsrückführung betrachten wir die Frequenzantworten des ursprünglichen und des transformierten Systems:
Es seien $x = A_{i\omega}^{-1}Bu$, also $Ax + Bu = i\omega x$ und $\tilde{u} = u + Fx$. Dann gelten

$$\underbrace{(A - BF)}_{=\tilde{A}}x + B\tilde{u} = i\omega x, \quad \text{d.h.} \quad A_{i\omega}^{-1}Bu = \tilde{A}_{i\omega}^{-1}\tilde{B}\tilde{u}, \tag{4.7}$$

und

$$\tilde{u} = u + Fx = \Big(I + FA_{i\omega}^{-1}B\Big)u =: \zeta u.$$

Für das so definierte ζ folgt aus Korollar 4.3 (mit $c_0^* = F$)

$$\tilde{\delta} = \delta\det\zeta \quad \text{oder} \quad \det\zeta = \frac{\tilde{\delta}}{\delta}. \tag{4.8}$$

Wegen (4.7) gilt für alle u

$$G(A_{i\omega}^{-1}Bu, u) = \tilde{G}(\tilde{A}_{i\omega}^{-1}\tilde{B}\tilde{u}, \tilde{u}),$$

also

$$u^*\frac{\Phi(i\omega)}{\delta(i\omega)^\nabla\delta(i\omega)}u = \tilde{u}^*\frac{\tilde{\Phi}(i\omega)}{\tilde{\delta}(i\omega)^\nabla\tilde{\delta}(i\omega)}\tilde{u} = u^*\zeta^*\frac{\tilde{\Phi}(i\omega)}{\tilde{\delta}(i\omega)^\nabla\tilde{\delta}(i\omega)}\zeta u$$

oder kurz

$$(\delta\delta^\nabla)^{-1}\Phi = (\tilde{\delta}\tilde{\delta}^\nabla)^{-1}\zeta^*\tilde{\Phi}\zeta.$$

Durch beidseitiges Berechnen der Determinanten erhalten wir mit (4.8)

$$\Big(\delta(i\omega)^*\delta(i\omega)\Big)^{1-m}\det\Phi(i\omega) = \Big(\tilde{\delta}(i\omega)^*\tilde{\delta}(i\omega)\Big)^{1-m}\det\tilde{\Phi}(i\omega)$$

und daraus $\phi = \tilde{\phi}$ wie behauptet. □

4.2 Beweis des Frequenzsatzes

Wir verwenden die Notation und Vereinbarungen aus dem vorangehenden Abschnitt; speziell setzen wir also für den Beweis voraus, daß das dort definierte Matrixpolynom Φ invertierbar ist. Die Aussage (a) von Satz 1.1 ist insbesondere äquivalent zu $\Phi(i\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$. Von nun ab wird vorausgesetzt, daß δ, δ^∇ und ϕ teilerfremd sind, was sich auch so schreiben läßt:

$$\mathrm{ggT}\Big(\delta^\nabla(\lambda), \delta(\lambda)\Big) = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}\Big(\delta^\nabla(\lambda)\delta(\lambda), \phi(\lambda)\Big) = 1 \tag{4.9}$$

und daß δ nur einfache Nullstellen besitzt. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ seien zusätzlich alle Nullstellen von δ reell. Dies ist möglich, da wegen der Kontrollierbarkeit des Systems nach dem Satz von der Polzuweisung durch Zustandsrückführung das Polynom $\delta(\lambda)$ beliebig vorgegeben werden kann, während das Polynom ϕ nach Lemma 4.1 unter solchen Transformationen invariant ist.
Im Beweis des Satzes werden wir sukzessive κ, h und H konstruieren, so daß (1.11) für $u = 0$ und für $x = A_{i\omega}^{-1}Bu$ erfüllt ist. Nach dem folgenden Lemma gilt die Aussage dann auch für beliebige (x, u):

Lemma 4.4 *Es sei $F(x, u)$ eine hermitesche Form des (x, u)-Raumes, und es gelte:*

$$F\Big(x, 0\Big) \equiv 0 \quad \textit{und} \quad \forall\omega \textit{ mit } i\omega \notin \sigma(A) \;:\; F\Big(A_{i\omega}^{-1}Bu, u\Big) \equiv 0.$$

Dann ist $F \equiv 0$.

Beweis: Für festes u folgt aus der Identität $F\Big(A_{i\omega}^{-1}Bu, u\Big) \equiv 0$ durch Grenzübergang $\omega \to \infty$, daß auch $F(0, u) \equiv 0$. Folglich ist F von der Gestalt:

$$F(x, u) = \frac{1}{2}(x^*, u^*)\begin{pmatrix} 0 & f \\ f^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\,(u^* f x). \tag{4.10}$$

Die rationale Funktion $q(\lambda) := u^* f^* A_\lambda^{-1} Bu$ hat also nach Voraussetzung auf der imaginären Achse verschwindenden Realteil, und nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip liegen die Pole von q symmetrisch zur imaginären Achse.
Andererseits sind alle Polstellen von q Nullstellen von δ, und aus (4.9) folgt, daß kein Nullstellenpaar von δ symmetrisch zur imaginären Achse liegt. Folglich ist q ein Polynom und wegen $|q(\lambda)| \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$ ist sogar $q \equiv 0$, und da q für ein beliebiges u definiert war, folgt $f^* A_\lambda^{-1} B \equiv 0$. Daher verschwindet in der Laurentreihe

$$f^* A_\lambda^{-1} B = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} f^* \frac{A^k}{\lambda^k} B$$

jeder Koeffizient. Mit der Kontrollierbarkeit von (A, B) impliziert dies $f = 0$, womit auch $F \equiv 0$ gezeigt ist. □

Beweis von Satz 1.1:
Wie angekündigt wird ein konstruktiver Beweis der Implikation (a)$\Longrightarrow$(c) gegeben:

1. Wegen $\Phi(i\omega) \geq 0$ ist $\det \Phi(i\omega) \geq 0$ und damit auch

$$\phi(i\omega) = \det \Phi(i\omega) |\delta(i\omega)|^{2(m-1)} \geq 0 \qquad (\text{mit } \phi \text{ aus Lemma 4.1}),$$

und nach Satz 3.2 existiert eine parahermitesche Faktorisierung

$$\phi(\lambda) = \psi(\lambda)^\nabla \psi(\lambda) \quad \text{mit} \quad \psi(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]. \tag{4.11}$$

2. Wir betrachten Gleichung (1.11) für $x = A_{i\omega}^{-1} Bu$.
In diesem Falle ist $Ax = -Bu + i\omega x$ und daher für beliebiges $H = H^*$

$$\operatorname{Re} x^* H(Ax + Bu) = \operatorname{Re} i\omega x^* Hx = 0,$$

d.h. (1.11) reduziert sich zu

$$\begin{aligned} G\Big(CA_{i\omega}^{-1}Bu, u\Big) &= u^* \frac{\Phi(i\omega)}{\delta(i\omega)^\nabla \delta(i\omega)} u \\ &= u^* \Big(h^* A_{i\omega}^{-1} B + \kappa\Big)^* \Big(h^* A_{i\omega}^{-1} B + \kappa\Big) u. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Durch eine geeignete Faktorisierung von Φ läßt sich dieses quadratische Problem zu einem linearen vereinfachen, jedoch sind die so erhaltenen linearen Gleichungssysteme für h nicht immer lösbar, da sie überbestimmt sind. Es wird sich zeigen, daß die Lösbarkeit der Gleichungen mit den Singularitäten der Faktoren zusammenhängt.
Wie oben gezeigt, ist

$$\det \Phi(\lambda) = \Big(\delta(\lambda)^{n-1}\psi(\lambda)\Big)^\nabla \Big(\delta(\lambda)^{n-1}\psi(\lambda)\Big),$$

und nach Satz 3.2 existiert ein $\Psi(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]^{m\times m}$ mit

$$\Phi(\lambda) = \Psi(\lambda)^\nabla \Psi(\lambda), \quad \det \Psi(\lambda) = \pm \delta(\lambda)^{n-1}\psi(\lambda) \tag{4.13}$$

und $\deg \Psi(\lambda) \leq n$. Es sei κ der Koeffizient bei λ^n in $\Psi(\lambda)$, also $\kappa = 0$, falls $\deg \Psi(\lambda) < n$.

3. Es ist nun zu zeigen, daß das Gleichungssystem

$$\frac{\Psi(\lambda)}{\delta(\lambda)} = h^* A_\lambda^{-1} B + \kappa, \tag{4.14}$$

welches (4.12) impliziert, eine Lösung h besitzt.
Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Nullstellen von $\delta(\lambda)$. Da alle λ_i nach (4.9) verschieden sind, haben die Singulärwertzerlegung von A und die zugehörige Partialbruchzerlegung von A_λ^{-1} die Gestalt

$$A = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j v_j^*, \quad A_\lambda^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{u_j v_j^*}{\lambda - \lambda_j}, \qquad \text{mit } v_j^* u_k = \delta_{jk}; \tag{4.15}$$

Entsprechend zerlegen wir die linke Seite von (4.14) partial:

$$\frac{\Psi(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \kappa + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Psi_j}{\lambda - \lambda_j}, \quad \text{wobei} \quad \Psi_j = \lim_{\lambda \to \lambda_j} (\lambda - \lambda_j) \frac{\Psi(\lambda)}{\delta(\lambda)} \in \mathbb{C}^{m \times m}. \tag{4.16}$$

Aus (4.15) und (4.16) folgt, daß (4.14) äquivalent ist zu dem System

$$\Psi_j = (h^* u_j)(v_j^* B) \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.17}$$

von nm^2 Gleichungen in den nm variablen Einträgen von h.
Um die Lösbarkeit dieses Systems zu zeigen, untersuchen wir die Ψ_j. Nach (4.13) gilt:

$$\Psi(\lambda) = \left(\Psi(\lambda)^\nabla\right)^{-1} \Phi(\lambda). \tag{4.18}$$

Wegen $\det \Psi(\lambda)^\nabla = \left(\delta(\lambda)^\nabla\right)^{n-1} \psi(\lambda)^\nabla$ nach (4.13) folgt mit (4.9), daß $\delta(\lambda)$ und $\det \Psi(\lambda)^\nabla$ keine Nullstellen gemeinsam haben. Deshalb existiert für $j = 1, \ldots, n$ der endliche Grenzwert:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_j} \left(\Psi(\lambda)^\nabla\right)^{-1} = \left(\Psi(\lambda_j)^\nabla\right)^{-1} =: R_j \in \mathbb{K}^{m \times m},$$

(reell im reellen Fall, da dann $\lambda_j \in \mathbb{R}$). Damit ist

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to \lambda_j} (\lambda - \lambda_j) \frac{\Phi(\lambda)}{\delta(\lambda)} &= \lim_{\lambda \to \lambda_j} \begin{pmatrix} \delta(\lambda)\chi(\lambda) \\ \delta(\lambda) I \end{pmatrix}^\nabla \begin{pmatrix} G_0 & G_1 \\ G_1^* & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_j) C A_\lambda^{-1} B \\ (\lambda - \lambda_j) I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} g_j \\ f_j \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} C u_j (v_j^* B) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (g_j^* C u_j)(v_j^* B).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

mit $g_j^* = (\delta\chi)^\nabla G_0 + \delta^\nabla G_1^* \in \mathbb{K}^{p \times m}$, da für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch $\lambda_j \in \mathbb{R}$.
Andererseits ist nach (4.18)

$$\begin{aligned}
\Psi_j &= \lim_{\lambda \to \lambda_j} (\lambda - \lambda_j) \frac{\Psi(\lambda)}{\delta(\lambda)} \\
&= \lim_{\lambda \to \lambda_j} \left(\Psi(\lambda)^\nabla\right)^{-1} \lim_{\lambda \to \lambda_j} (\lambda - \lambda_j) \frac{\Phi(\lambda)}{\delta(\lambda)} \\
\text{(4.19) eingesetzt} \quad &= R_j (g_j^* C u_j)(v_j^* B),
\end{aligned}$$

also $\Psi_j = R_j (g_j^* u_j)(v_j^* B)$. Damit reduziert sich schließlich das System (4.17) zu

$$R_j g_j^* C u_j = h^* u_j, \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.20}$$

oder mit $U = \left(u_1, \ldots, u_n\right)$ und $\tilde{U} = \left(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n\right)$, worin $\tilde{u}_j := R_j g_j^* C u_j$,

$$\tilde{U} = h^* U.$$

Da die u_j nach (4.15) linear unabhängig sind, ist die $n \times n$-Matrix U nichtsingulär, und es ist $h = U^{-*} \tilde{U}^*$ wohlbestimmt.

4. Es bleibt noch $H = H^*$ so zu bestimmen, daß (1.11) für $u = 0$ erfüllt ist. In diesem Fall hat (1.11) die Gestalt:

$$x^*(HA + A^*H - C^*G_0C)x = -x^*hh^*x, \tag{4.21}$$

d.h. es ist die (Sylvestersche) Matrixgleichung

$$HA + A^*H = C^*G_0C - hh^* \tag{4.22}$$

mit $H = H^* \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zu lösen. Da A wegen (4.9) keine Eigenwerte symmetrisch zur imaginären Achse besitzt, ist das eindeutig möglich, also ist auch die Existenz von H gewährleistet.

Mit den gefundenen Größen gilt nach Konstruktion

$$2\mathrm{Re}\, x^*H(Ax + Bu) - G(y, u) + \left|h^*x + \kappa u\right|^2 = 0$$

für $u = 0$ und $x = A_{i\omega}^{-1}Bu$ und damit nach Lemma 4.4 überall. □

5

Frequenzmethoden zur Abschätzung singulärer Werte

Bei Stabilitätsuntersuchungen spielen Abschätzungen für singuläre Werte von Fundamentalmatrizen eine entscheidende Rolle. Wir zeigen nun, wie man anhand von Frequenzkriterien Schranken für singuläre Werte nachweisen kann, und wie man mit deren Hilfe Dimensionsabschätzungen für invariante Mengen erhält Hierbei setzen wir die Kenntnis der entsprechenden Sätze aus [LeoBoi92] voraus. Zunächst betrachten wir die lineare zeitvariante Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \text{ stetig.} \tag{5.1}$$

Es seien $X(t)$ die Fundamentalmatrix von (5.1) mit $X(0) = I$ und $\sigma_1(t) \geq \ldots \geq \sigma_n(t)$ die Singulärwerte von $X(t)$. Wir benötigen zwei einfache Lemmata.

Lemma 5.1 *Es seien U ein k-dimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^n$ und $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine beliebige Funktion.*

(a) Wenn für alle $v \in U$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $|X(t)v| \geq \alpha(t)|v|$, so ist $\sigma_k(t) \geq \alpha(t)$.

(b) Wenn für alle $v \in U$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $|X(t)v| \leq \alpha(t)|v|$, so ist $\sigma_{n-k+1}(t) \leq \alpha(t)$.

Beweis: Es seien $u_j(t)$ die zu den σ_j gehörigen Eigenvektoren von $X^T(t)X(t)$, so daß also $X^T(t)X(t)u_j(t) = \sigma_j(t)^2 u_j(t)$.
Im Fall (a) betrachten wir für festes t ein v in U mit $v^T u_j(t) = 0$ für $j = 1, \ldots, k-1$. Dann gilt

$$\alpha(t)^2|v|^2 \leq |X(t)v|^2 \leq \sigma_k(t)^2|v|^2,$$

also $\alpha(t) \leq \sigma_k(t)$, wie behauptet.
Entsprechend betrachten wir im Fall (b) ein v in U mit $v^T u_j(t) = 0$ für $j = n-k+2, \ldots, n$, so daß

$$\alpha(t)^2|v|^2 \geq |X(t)v|^2 \geq \sigma_{n-k+1}(t)^2|v|^2,$$

also $\alpha(t) \geq \sigma_{n-k+1}(t)$, wie behauptet. □

Lemma 5.2 *(a) Es seien H eine symmetrische Matrix mit mindestens k negativen Eigenwerten, $V(x) := x^T H x$ die zugehörige quadratische Form und*

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < 0\}.$$

Für eine Zahl λ und jede Lösung $x(t) = x(t, x_0)$ von (5.1) mit $x(0) = x_0 \in \Omega$ gelte

$$\forall t \geq 0 : \quad \dot{V}(x(t)) + 2\lambda V(x(t)) \leq 0. \tag{5.2}$$

Dann existiert eine Zahl β mit

$$\forall t \geq 0 : \quad \sigma_k(t) \geq \beta e^{-\lambda t}. \tag{5.3}$$

(b) Hat andererseits H mindestens k positive Eigenwerte und gilt (5.2) für alle $x(t, x_0)$ mit x_0 aus $\tilde{\Omega} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) > 0\}$, so gibt es ein $\tilde{\beta}$ mit

$$\forall t \geq 0 : \quad \sigma_{n-k+1}(t) \leq \tilde{\beta} e^{-\lambda t}. \tag{5.4}$$

Beweis: Voraussetzung (5.2) läßt sich umschreiben zu

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\lambda t} V(x(t))\right) \leq 0, \qquad \text{also} \qquad V(x(t)) \leq e^{-2\lambda t} V(x_0).$$

Wir bezeichnen mit $\beta_1 \leq \ldots \leq \beta_n$ die Eigenwerte von H (nach Vielfachheiten gezählt). Im Fall (a) sind $\beta_1, \ldots, \beta_k$ negativ, und es sei $U \subset \Omega$ der k-dimensionale Raum, der durch die zugehörigen Eigenvektoren aufgespannt wird. Dann gilt für $x_0 \in U$

$$\beta_1 |x(t)|^2 \leq x(t)^T H x(t) \leq e^{-2\lambda t} x_0^T H x_0 \leq \beta_k e^{-2\lambda t} |x_0|^2, \tag{5.5}$$

also mit $\beta^2 := \frac{\beta_k}{\beta_1}$

$$\forall x_0 \in U : \quad |X(t) x_0|^2 \geq \beta^2 e^{-2\lambda t} |x_0|^2, \tag{5.6}$$

so daß Abschätzung (5.3) nun aus Lemma 5.1(a) folgt.
Im Fall (b) definieren wir $\tilde{U} \subset \tilde{\Omega}$ als den durch die Eigenvektoren zu den positiven Eigenwerten $\beta_{n-k+1} \leq \ldots \leq \beta_n$ aufgespannten Raum. Wie oben erhalten wir die Ungleichung (5.5) mit β_{n-k+1} und β_n anstelle von β_1 und β_k, jedoch ändert sich beim Übergang zu (5.6) (mit $\tilde{\beta}^2 := \frac{\beta_n}{\beta_{n-k+1}}$ anstatt β^2) das Ungleichheitszeichen nicht, also

$$\forall x_0 \in \tilde{U} : \quad |X(t) x_0|^2 \leq \tilde{\beta}^2 e^{-2\lambda t} |x_0|^2,$$

und die Behauptung folgt aus Lemma 5.1(b). □

Wir schreiben nun das System (5.1) als Kontrollsystem mit

$$A(t) = A + BU(t), \qquad \text{wobei } A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ und } U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n} \text{ stetig.} \tag{5.7}$$

Eine solche Darstellung ist offensichtlich immer möglich. Desweiteren betrachten wir einen Ausgang des Systems $y := Cx$ mit $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und eine quadratische Form $G(x, u)$

$$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Wir setzen im weiteren voraus, daß das Paar (A, B) kontrollierbar ist und (A, C) beobachtbar. Für dieses System können wir ein Frequenzkriterium zur Abschätzung von σ_k angeben.

Satz 5.3 *Für die quadratische Form G gelte*

$$\exists \epsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n : \qquad G(x, Cx) \geq \epsilon |Cx|^2 \tag{5.9}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0 : \qquad G(x, U(t)x) \geq 0, \tag{5.10}$$

und für eine Zahl λ sei folgende Frequenzbedingung erfüllt:

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : \forall u \in \mathbb{R}^m : \quad G\Big(\big((i\omega - \lambda)I - A\big)^{-1} Bu, u\Big) \leq 0. \tag{5.11}$$

(a) Wenn die Matrix $A + BC + \lambda I$ mindestens k Eigenwerte mit positivem Realteil hat, dann existiert eine Zahl β, so daß

$$\sigma_k(t) \geq \beta e^{-\lambda t}. \tag{5.12}$$

(b) Wenn die Matrix $A + BC + \lambda I$ mindestens k Eigenwerte mit negativem Realteil hat, dann existiert eine Zahl $\tilde{\beta}$, so daß

$$\sigma_{n-k+1}(t) \leq \tilde{\beta} e^{-\lambda t}. \tag{5.13}$$

Beweis: Aus der Frequenzbedingung (5.11) folgt mit dem Frequenzsatz 1.1 bzw. 1.2 die Existenz einer symmetrischen Matrix H mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m : \quad 2x^T H\Big((A + \lambda I)x + Bu\Big) + G(x, u) \leq 0.$$

Mit Voraussetzung (5.9) folgt

$$2x^T H(A + \lambda I + BC)x \leq -|Cx|^2.$$

Wegen der Beobachtbarkeit von (A, C) liegt kein Eigenvektor von $A + \lambda I + BC$ im Kern von C, und da $A + \lambda I + BC$ mindestens k Eigenwerte in $\mathbb{C}_+$ (bzw. $\mathbb{C}_-$) hat, hat entsprechend H mindestens k Eigenwerte in $\mathbb{C}_-$ (bzw. $\mathbb{C}_+$). Weiter folgt aus Voraussetzung (5.10) für die Funktion $V(x) := x^T Hx$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) + 2\lambda V(x(t)) &= 2x(t)H\Big(A + BU(t) + \lambda I\Big)x(t) \\
&= 2x(t)H\Big((A + \lambda I)x(t) + BU(t)x(t)\Big) + G\Big(x(t), U(t)x(t)\Big) \\
&\quad -G\Big(x(t), U(t)x(t)\Big) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Also folgen die Abschätzung (5.12) und (5.13) mit Lemma 5.2 (a) und (b). □

Korollar 5.4 *Die Kontrolle im obigen System sei nun von der speziellen Gestalt*

$$U(t)x = u(t)y = u(t)Cx \quad \text{mit} \quad \forall t \geq 0 : \ 0 \leq u(t) \leq \mu \quad \text{für ein } \mu > 0. \tag{5.14}$$

Es sei eine Zahl λ gegeben, so daß folgende Frequenzbedingung erfüllt ist:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}: \quad \operatorname{Re} C\Big((i\omega - \lambda)I - A\Big)^{-1} B + \frac{1}{\mu} I \leq 0. \tag{5.15}$$

(a) Wenn die Matrix $A + \lambda I$ mindestens k Eigenwerte mit positivem Realteil hat, dann existiert eine Zahl β, so daß

$$\sigma_k(t) \geq \beta e^{-\lambda t}. \tag{5.16}$$

(b) Wenn die Matrix $A + \lambda I$ mindestens k Eigenwerte mit negativem Realteil hat, dann existiert eine Zahl $\tilde{\beta}$, so daß

$$\sigma_{n-k+1}(t) \leq \tilde{\beta} e^{-\lambda t}. \tag{5.17}$$

Beweis: Wir wenden Satz 5.3 mit δC anstatt C für hinreichend kleines δ und der quadratischen Form

$$G(x, u) := (x^T, u^T) \begin{pmatrix} 0 & C^T \\ C & \frac{2}{\mu} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

an. Es gilt

$$\begin{aligned} G\left(\Big((i\omega - \lambda)I - A\Big)^{-1} Bu, u\right) &= \operatorname{Re} C\Big((i\omega - \lambda)I - A\Big)^{-1} B + \frac{1}{\mu} I \\ &\leq 0 \quad \text{für beliebige } u \text{ nach (5.15)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} G(x, \delta C x) &= x^T(\delta C^T C + C^T \delta C)x - \frac{2}{\mu} x^T(\delta C^T \delta C)x \\ &= 2\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\mu}\right) |\delta C x|^2 \\ &\geq |\delta C x|^2 \quad \text{für } \delta \leq \frac{2\mu}{\mu + 2}. \end{aligned}$$

Wegen (5.14) gilt außerdem

$$\begin{aligned} G(x, U(t)x) &= G(x, u(t)Cx) \\ &= 2u(t)\left(1 - \frac{u(t)}{\mu}\right) |Cx|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ist nun δ so klein gewählt, daß auch die Matrix $A + B\delta C + \lambda I$ mindestens k Eigenwerte in $\mathbb{C}_+$ (bzw. $\mathbb{C}_-$) hat, dann ist Satz 5.3 mit δC anstatt C anwendbar und liefert das Gewünschte. □

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall einer autonomen Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{mit } f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n). \tag{5.18}$$

Diese läßt sich auf vielfache Art in ein Kontrollsystem

$$\dot{x} = Ax + B\phi(x) \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B \in \mathbb{R}^{n \times m},\ \phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \tag{5.19}$$

umschreiben.

Satz 5.5 *Es sei M eine invariante Menge des Systems (5.18). Für $k = 1, \ldots, n$ seien $\dot{x} = A_k x + B_k \phi_k(x)$ Darstellungen dieses Systems wie in (5.19) mit kontrollierbaren Paaren (A_k, B_k). Außerdem seien Matrizen $C_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben, so daß die Paare (A_k, C_k) beobachtbar sind, und quadratische Formen G_k wie in (5.8), so daß erstens*

$$\forall k = 1, \ldots, n : \forall x \in \mathbb{R}^n,\, x_0 \in M : G_k\Big(x, \phi'(x_0)x\Big) \geq 0 \tag{5.20}$$

und zweitens für ein $\epsilon > 0$

$$\forall k = 1, \ldots, n : \forall x \in \mathbb{R}^n : G_k\Big(x, C_k x\Big) \geq \epsilon |C_k x|^2. \tag{5.21}$$

Weiter sei eine Folge von Zahlen $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ gegeben, so daß

$$\forall k = 1, \ldots, n : \forall \omega \in \mathbb{R} : \forall u \in \mathbb{R}^m : \quad G_k\left(\Big((i\omega - \lambda_k)I - A_k\Big)^{-1} B_k u, u\right) \leq 0. \tag{5.22}$$

Es seien $d \in]\,0, n\,]$, $d = d_0 + s$ mit $d_0 \in \mathbb{N}$ und $s \in [\,0, 1\,[$, sowie $\alpha > 0$.

(a) Wenn für alle $k = d_0 + 1, \ldots, n$ die Matrix $A_k + B_k C_k + \lambda_k I$ mindestens k Eigenwerte mit positivem Realteil hat und gilt

$$\forall x \in M : \quad \mathrm{Spur} f'(x) + (1 - s)\lambda_{d_0+1} + \sum_{k=d_0+2}^{n} \lambda_k \leq -\alpha < 0, \tag{5.23}$$

dann ist $\dim_H M < d$.

(b) Wenn für alle $k = n - d_0, \ldots, n$ die Matrix $A_k + B_k C_k + \lambda_k I$ mindestens k Eigenwerte mit negativem Realteil hat und gilt

$$\forall x \in M : \quad s\lambda_{n-d_0} + \sum_{k=n-d_0+1}^{n} \lambda_k \geq \alpha > 0, \tag{5.24}$$

dann ist $\dim_H M < d$.

Beweis: Die Variationsgleichung des Systems (5.18) entlang einer gegebenen Lösung $x(t)$ ist

$$\dot{y} = f'(x(t, x_0))y = \Big(A_k + B_k \phi'(x(t, x_0))\Big)y \quad \text{für } k = 1, \ldots, n \tag{5.25}$$

und hat die Fundamentallösung $x'(t, x_0)$. Mit

$$U_k(t) := B_k \phi'(x(t, x_0))$$

ist (5.25) von der Gestalt (5.7), und mit $X(t) = x'(t, x_0)$ sind jeweils für $\lambda = \lambda_k$ die Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt.
Im Fall (a) existiert daher ein β, so daß

$$\forall k = d_0 + 1, \ldots, n : \sigma_k(t) \geq \beta e^{-\lambda_k t}.$$

Im Fall (b) existiert entsprechend ein $\tilde{\beta}$, so daß

$$\forall k = 1, \ldots, d_0 + 1 : \sigma_{n-k+1}(t) \leq \tilde{\beta} e^{-\lambda_k t}.$$

Es ist daher im Fall (a)

$$\begin{aligned}
\det{}_d x'(t, x_0) &= \frac{\det x'(t, x_0)}{\sigma_{d_0+1}(t)^{1-s} \sigma_{d_0+2}(t) \cdots \sigma_n(t)} \\
&\leq \exp\left(\int_0^t \operatorname{Spur} f'(x(\tau, x_0)) d\tau\right) \beta^{n-d} \exp\left((1-s)\lambda_{d_0+1} + \sum_{k=d_0+2}^{n} \lambda_k\right) \\
&= \beta^{n-d} \exp\left(\int_0^t \operatorname{Spur} f'(x(\tau, x_0)) d\tau + (1-s)\lambda_{d_0+1} + \sum_{k=d_0+2}^{n} \lambda_k\right) \\
&\leq \beta^{n-d} e^{-\alpha t} \stackrel{t \to \infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

und im Fall (b) haben wir

$$\begin{aligned}
\det{}_d x'(t, x_0) &= \sigma_1(t) \cdots \sigma_{d_0}(t) \sigma_{d_0+1}(t)^s \\
&\leq \tilde{\beta}^d \exp\Big(-(\lambda_n + \ldots + \lambda_{n-d_0+1} + s\lambda_{n-d_0})t\Big) \\
&\leq \tilde{\beta}^d e^{-\alpha t} \stackrel{t \to \infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Mit der Abbildung $x(T, \cdot) : M \to M$ für ein großes T befinden wir uns also jeweils wieder in der Situation von Satz 4.1, [LeoBoi92] (mit $p \equiv 1$), und mit diesem folgt das Behauptete. □

Ist ϕ in (5.19) lediglich ein skalarer Faktor, so läßt sich das Kriterium aus Korollar 5.4 zur Dimensionsabschätzung heranziehen.

Korollar 5.6 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.5 mit skalaren Funktionen $\phi_k \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Für Zahlen $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ gelte jeweils die Frequenzbedingung*

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : \quad \operatorname{Re} C_k \Big((i\omega - \lambda_k)I - A_k\Big)^{-1} B_k + \frac{1}{\mu} I \leq 0.$$

Wenn entweder jeweils $A + \lambda_k I$ mindestens k Eigenwerte in $\mathbb{C}_+$ hat und (5.23) gilt oder $A + \lambda_k I$ mindestens k Eigenwerte in $\mathbb{C}_-$ hat und (5.24) gilt, dann ist $\dim_H M < d$.

Beweis: Die Behauptung folgt mit Korollar 5.4 genauso wie Satz 5.5 aus Satz 5.3. □

Literaturverzeichnis

[Coppel72] *W.A. Coppel*: Linear Systems. *Notes on Pure Mathematics 6, Australian National University, Canberra* (1972).

[Dok93] *D.Z. Dokovic*: Factorization of Hermitian Matrix Polynomials with Constant Signature. *Linear Algebra and Its Applications 194: 85-90* (1993).

[DouOes80] *A. Douady, J. Oesterlé*: Dimension de Hausdorff des attracteurs. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A290* (1990), 1135-1138.

[Gan86] *F.R. Gantmacher*: Matrizentheorie (Übersetzung der zweiten russischen Auflage von 1966 mit einem Anhang von V.B. Lidskij). *Springer* (1986).

[GeLeYa78] *A.H. Gelig, G.A. Leonov, V.A. Yakubovich*: Stability of Systems with Nonunique Equilibrium State. *Nauka, Moscow* (1978).

[GoLaRo82] *I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman*: Factorization of self-adjoint matrix polynomials with constant signature. *Linear and Multilinear Algebra 11* (1982), 209-224.

[Grö66] *W. Gröbner*: Matrizenrechnung. *B.I.* (1966).

[Jak70] *V.A. Jakubovich*: Factorization of Symmetric Matrix Polynomials (English Translation). *Soviet Math. Dokl. Vol. 11, No. 5* (1970), 1261-1264.

[Jak73] *V.A. Jakubovich*: A Frequency Theorem in Control Theory (English Translation). *Siberian Mathematical Journal 14* (1973), 265-289.

[Jak77] *V.A. Jakubovich*: The S-Procedure in Nonlinear Control Theory (English Translation). *Vestnik Leningrad Univ. Math. Vol. 4* (1977), 73-93.

[KnoKwa85] *H.W. Knobloch, H. Kwakernaak*: Lineare Kontrolltheorie. *Springer* (1985).

[Leonov96a] Г.А. Леонов: О нижних оценках ляпуновских экспонент и верхних отсенках хаусдорфовой размерности аттракторов.
(*G.A. Leonov*: Untere Abschätzungen von Ljapunovexponenten und obere Abschätzungen der Hausdorffdimension von Attraktoren.)
УДК 621.376.54 (1996).

[LeoBoi92] *G.A. Leonov, V.A. Boichenko*: Lyapunov's Direct Method in the Estimation of the Hausdorff Dimension of Attractors. *Acta Applicandae Mathematicae 26* (1992), 1-60.

[LeBuSh95] *G.A. Leonov, I.M. Burkin, A.I. Shepelyavyi*: Frequency Methods in Oscillation Theory. *Kluwer Acad. Publ., Dordrecht* (1995).

[Lju72] *B.D. Ljubachevskij*: A Representation of a Symmetric Polynomial Matrix (English Translation 1978). *Vestnik Leningrad Univ. Math. Vol. 5* (1978), 245-249.

[Lju73] *B.D. Ljubachevskij*: Factorization of Symmetric Matrices with Elements from a Ring with Involution I,II (English Translation). *Siberian Mathematical Journal 14* (1973), 233-246, 423-433.

[Popov73] *V-M. Popov*: Hyperstability of Control Systems. *Springer* (1973).

[Ran96] *A. Rantzer:* On the Kalman-Yakubovich-Popov Lemma. *System & Control Letters 28* (1996), 7-10

[Ros70] *H.H. Rosenbrock:* State-space and Multivariable Theory. *Nelson* (1970).