Normalisatoren in symmetrischen Gruppen.

Satz. *Es sei X eine endliche Menge und $H \leq G \leq \mathrm{Sym}(X)$. Es seien $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ die Bahnen von H auf X.*

(a) *Sei $g \in G$. Dann hat H^g die Bahnen $\Gamma_1 g, \ldots, \Gamma_r g$.*

(b) *Sei $g \in N_G(H)$. Dann gilt $\Gamma_i g \in \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r\}$ und $|\Gamma_i g| = |\Gamma_i|$ für alle $1 \leq i \leq r$.*

(b) *Sei $H = \langle h \rangle$, $h = (a_1, \ldots, a_n)$ und $X' = X - \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann gilt*

$$C_{\mathrm{Sym}(X)}(H) = H \times \mathrm{Sym}(X'), \quad C_G(H) = H \times (G \cap \mathrm{Sym}(X')),$$

und

$$N_{\mathrm{Sym}(X)}(H) = AH \times \mathrm{Sym}(X'), \quad N_G(H) = (G \cap AH) \times (G \cap \mathrm{Sym}(X'))$$

mit $A \simeq \mathrm{Aut}(H)$.

Beweis. (a) Sei $\Gamma = \Gamma_i$ und $h \in H$, so $\Gamma g h^g = \Gamma h g = \Gamma g$. Also ist Γg eine H^g-Bahn.
(b) Wegen (a) ist Γg eine Bahn von $H^g = H$.
(c) Nach (b) läßt $x \in N_{\mathrm{Sym}(X)}(H)$ die Mengen $Y = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $X' = \mathrm{Fix}_X(H)$ invariant und offensichtlich gilt $B = \mathrm{Sym}(X') \leq C_{\mathrm{Sym}(X)}(H)$ und wie auch $G \cap B \leq C_G(H)$.
Ferner: Ist $x = ab \in N_G(H)$ (bzw. $x = ab \in C_G(H)$) mit $a \in \mathrm{Sym}(Y)$, $b \in \mathrm{Sym}(X')$, so ist offenbar auch a und b in $N_G(H)$ (bzw. $C_G(H)$). Daher genügt es den Fall $X = Y$ zu betrachten.
Sei $x \in C_G(H)$ und $a_1 x = a_k$, so $a_2 x = a_1 h x = a_1 x h = a_k h = a_{k+1}$ (die Indizes modulo n gelesen). Induktion zeigt $a_\ell x = a_{\ell+k-1}$, und daher $x = h^{k-1}$. Wir haben $C_G(H) = H$.
Sei $A = \mathrm{Aut}(H)$ und AH das semidirekte Produkt von A mit H (bezüglich der natürlichen Aktion von A). Die Darstellung von AH auf den Rechtsnebeklassen von A in H liefert eine treue Permutationsdarstellung von AH vom Grad $n = |H| = |X|$. Da alle Zyklen der Länge n in $\mathrm{Sym}(X)$ konjugiert sind und da $N_G(H)/C_G(H)$ isomorph zu einer Untergruppe von A ist, folgt nun Aussage (c).