Singerzyklen.

Satz. (Schursches Lemma) *Es sei R ein Ring, M ein R-Linksmodul und $S \subseteq \mathrm{End}_R(M)$ eine irreduzible Teilmenge (d.h. 0 und M sind die einzigen S-invarianten Teilmodulen). Dann ist*

$$F = C_{\mathrm{End}_R(V)}(S) = \{a \in \mathrm{End}_R(V) \mid as = sa,\ s \in S\}$$

ein Schiefkörper.

Beweis. Zunächst $\mathbf{0}_M, \mathbf{1}_M \in F$ und offensichtlich ist F ein Ring. Sei $0 \neq a \in F$. Wir müssen zeigen, daß a invertierbar ist. Die Teilmoduln $U = \ker a \neq M$ und $V = \mathrm{Im}\, a \neq 0$ sind S-invariant: Ist $u \in U$ und $s \in S$, so $(us)a = (ua)s = 0$ und ist $v = ma \in V$, so $vs = (ma)s = (ms)a \in V$. Also nach Voraussetzung $U = 0$ und $V = M$, dh. a ist ein R-Isomorphismus und damit invertierbar und es ist klar, daß a^{-1} auch in F liegt.

Satz. *Es sei $G = \mathrm{GL}(n, q)$. Dann gilt:*

(a) *Es sei $Z = \langle z \rangle$ eine irreduzible, zyklische Untergruppe von G. Dann gilt:*

  (1) *$Z_1 = C_G(Z)$ ist zyklisch der Ordnung $q^n - 1$. Ferner ist $F = K[Z] \simeq GF(q^n)$ und $Z_1 = F - 0$.*

  (2) *$N_G(Z) = Z_1\langle \alpha \rangle$ ist ein semidirektes Produkt mit $|\alpha| = n$.*

(b) *G besitzt irreduzible, zyklische Untergruppen der Ordnung $q^n - 1$.*

Beweis. Sei $V = K^n,\ K = \mathrm{GF}(q)$ und $G = \mathrm{GL}(V)$.
(a) Setze

$$F = C_{\mathrm{End}(V)}(Z) = \{x \in \mathrm{End}(V) \mid zx = xz\}.$$

Dann enthält F sowohl Z wie auch $K \cdot \mathbf{1}$. Nach dem Schurschen Lemma ist F ein Schiefkörper, der $K \simeq K \cdot \mathbf{1}$ als Teilkörper enthält. Da F endlich ist, ist F nach dem Satz von Wedderburn ein Körper, d.h. ein Erweiterungskörper von K. Also $F \simeq \mathrm{GF}(q^r)$, r geeignet. Wir können auf offensichtliche Weise V als F-Vektorraum auffassen und Z als eine Gruppe F-linearer Abbildungen. Sei $0 \neq v_0 \in V$. Dann ist v_0F invariant unter Z. Nach Voraussetzung ist dann $V = v_0F$. Wir folgern $|F| = q^n$, also $n = r$. Da Z irreduzibel ist, gilt auch $F = K[Z]$. Daher ist $Z_1 = F^* = C_G(Z)$ zyklisch der Ordnung $q^n - 1$. Es gilt

(1).

Zu (2): Sei $x \in G$. Dann definiert $\widehat{x} : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$, $\widehat{x}(y) = xyx^{-1}$, einen K-Algebrenhomomorphismus. Insbesondere für $x \in N_G(Z)$ definiert die Einschränkung von $\widehat{x}$ auf F einen Körperautomorphismus, d.h. $\widehat{x} \in \mathrm{Gal}(F : K)$. Damit ist $N_G(Z) \ni x \mapsto \widehat{x} \in \mathrm{Gal}(F : K)$ ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $C_G(Z) = Z_1$. Definiere die Abbildung $\alpha : V \to V$ durch

$$(v_0 y)\alpha = v_0 y^q, \quad y \in F.$$

Man sieht sofort, daß α eine invertierbare, K-lineare Abbildung ist und daß $y^\alpha = y^q$ gilt für $y \in Z_1$, d.h. $\alpha \in N_G(Z)$. Man weiß: $\mathrm{Gal}(F : K) = \langle \gamma \rangle$ mit $y^\gamma = y^q$ für $y \in F$. Daher gilt $\gamma = \widehat{\alpha}$ und

$$N_G(Z)/Z_1 \simeq \mathrm{Gal}(F : K) = \langle \alpha \rangle.$$

(b) Identifiziere V mit $F = \mathrm{GF}(q^n)$. Die multiplikative Gruppe von F werde von ω erzeugt. Dann definieren wir eine K-lineare Abbildung $z_1 : V \to V$ durch $vz_1 = \omega v$. Da $F - 0 = V - 0$ eine Bahn von $Z_1 = \langle z_1 \rangle$ ist, ist Z_1 eine zyklische, irreduzible Untergruppe von G der Ordnung $q^n - 1$.

Definition. Irreduzible, zyklische Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, q)$ der Ordnung $q^n - 1$ heißen *Singerzyklen*.