§5 Präsentationen, Coxetergruppen

Ziel dieses Abschnittes ist es einen rein algebraischen (gruppentheoretischen) Zugang zu den Spiegelungsgr. zu geben.

(5.1) Satz. Es sei W die Weylgruppe des WZS (Φ, Π), $\Pi = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Setze $m_{ij} = |s_i s_j|$.
Dann hat W die Präsentation

$$W \cong \langle x_1, \ldots, x_n \mid (x_i x_j)^{m_{ij}} = 1,\ 1 \le i,j \le n \rangle.$$

Bew. Sei

$$G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid (x_i x_j)^{m_{ij}} = 1, \ldots \rangle.$$

Aus der universellen Eig. der so präsentierten Gr. folgt, daß es einen Epim.

$$\varphi : G \to W \text{ gibt mit } \varphi(x_i) = s_i$$

Zeige: φ ist ein Isomorphismus.

(1) Für alle $1 \le i,j \le n$ gilt: $|x_i| = 2$ und
$\varphi : G_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle \to W_{\{i,j\}}$ ist ein Isomorphismus:

Da $(x_i x_i)^1 = 1$ und $|\varphi x_i| = |s_i| = 2$ folgt $|x_i| = 2$.

Da G_{ij} von zwei Involutionen erzeugt wird, ist G_{ij} eine Diedergruppe. Setze $m = m_{ij}$. Dann $\varphi(x_i x_j) = s_i s_j$ und $|x_i x_j| = m$, da $|s_i s_j| = m$.

Also $G_{ij} \cong D_{2m} \cong W_{ij}$

(2) Zu $a \in \Phi^+$ existiert ein El. $x_a \in G$ mit folg. Eig.:

(i) $x_i x_a x_i = x_{s_i a}$, für $a \neq a_i$.

(ii) $\varphi(x_a) = s_a$.

(iii) $x_{a_i} = x_i$.

Definiere rekursiv (bzg. der Totalordn. auf Φ) die El. x_a.

Induktionsanfang: $x_1 = 1$, $x_{a_i} = x_i$

Sei x_a schon konstruiert für $a < b$.

Dann $b \in \Phi^+ - \Pi$. Nach (4.8.f) existiert ein i mit $s_i b < b$. Definiere

$$x_b := x_i x_{s_i b} x_i$$

Dann $\varphi(x_b) = s_i s_{s_i b} s_i = s_{s_i^2 b} = s_b$ i.e. (ii) ok.

Wir definieren die x_a rekursiv im folgenden Sinne:

Sei x_a schon konstruiert für $a < b$.

Dann gilt (i) für a, $s_i a < b$ und $a_i < b$.

Rekursionsbeginn ist das Elem. $a_{i_0} \in \Pi$ das minimal bzg. $<$ ist. Hier setze $x_{a_{i_0}} := x_{i_0}$.

Sei nun $b > a_{i_0}$. Falls $b = a_j$ einfach ist setze

$$x_b = x_j$$

und andernfalls ex. nach (4.8 f) ein i mit $s_i b < b$

Dann setze ($x_{s_i b}$ ist definiert)

$$x_b = x_i x_{s_i b} x_i$$

Nach Def. gilt (ii)

$[\varphi(x_i x_{s_i b} x_i) = s_i s_{s_i b} s_i = s_{s_i^2 b} = s_b]$.

Noch zu zeigen (i):

$$x_j x_b x_j = x_{s_j b}, \text{ für } s_j b \le b$$

(d.h. für $(b, a_j) \ge 0$).

Ist $b = a_j$, so ist nichts zu zeigen.

Augenommen $b \in \langle a_i, a_j \rangle$ (wie oben), Dann folgt (i) aus (1) (und da (i) für die Spiegelun S_b, S_j gilt).

Sei also $b \notin \langle a_i, a_j \rangle$ und $S_b \notin W_{\{i,j\}}$

Nach (2.5) ist dann

$$w b \in \Phi^+, \quad w b \leq b \ldots$$

für $w \in W_{\{i,j\}}$

<u>Fall</u> $b > S_j b$. Da $b > S_i b$ (Wahl von i) ist nach (3.5)

$$b > w b, \text{ für } 1 \neq w \in W_{\{i,j\}}$$

Somit für $1 \leq l < m$; $m = m_{ij}$:

$$(S_i S_j)^l S_i b, \quad S_j (S_i S_j)^l S_i b < b$$

$$\Longrightarrow \quad S_j = S_i (S_j S_i)^{m-1} \quad \text{und mit (i) und der Induktion gilt:}$$

$$x_{S_j b} = x_{S_i \underbrace{(S_j S_i)^{m-1} b}_{<b}} \underset{\text{Ind}}{=} x_i \, x_{(S_j S_i)^{m-1} b} \, x_i$$

$$\underset{\text{Ind}}{=} x_i \left(x_j \, x_{S_i (S_j S_i)^{m-2} b} \, x_j \right) x_i = \ldots$$

$$= (x_i x_j)^{m-1} x_{S_i b} (x_i x_j)^{1-m} \underset{\text{Def } x_b}{=} (x_i x_j)^{m-1} x_i \, x_b \, x_i (x_i x_j)^{1-m}$$

$$\underset{|x_i x_j| = m}{=} x_j \, x_b \, x_j.$$

Fall $b = s_j b$. Setze $P = \langle a_i, a_j \rangle$.

Dann $w_{P^\perp} = 1$ für $w \in W_{\{i,j\}}$ und $b \perp a_j$.

Schreibe $b = p + q$ mit $p \in P \cap \langle a_j \rangle^\perp$, $q \in P^\perp$.

Sei $w \in W_{\{i,j\}}$ mit $wb = b$, so $w = 1$ oder s_j:

$wb = b \Leftrightarrow wp = p \Leftrightarrow w a_j \in \langle a_j \rangle$

$\Leftrightarrow w a_j = \pm 1$ $(\det w = \pm 1) \Leftrightarrow w = 1$ oder s_j.

Insbesondere

$$wb < b \text{ für } w \in W_{\{i,j\}} - \{1, s_j\}.$$

Wir haben für $1 \le \ell < m$

$u_\ell = (s_j s_i)^\ell$, $v_\ell = s_i (s_j s_i)^{\ell-1} \in W_{\{i,j\}} - \{1, s_j\}$

$\Longrightarrow u_\ell b < b$, $v_\ell b < b$. Nach Ind.

$$x_{s_j b} = x_{s_i u_{m-1} b} \underset{\text{Ind.}}{=} x_i \, x_{s_j v_{m-1} b} \, x_i$$

$$= \dots = (x_j x_i)^{m-1} x_{s_i b} (x_j x_i)^{1-m}$$

$$\underset{\text{Def}}{=} (x_i x_j)^{m-1} \, x_i x_b x_i \, (x_j x_i)^{1-m} = x_j x_b x_j$$

(4) Ker $\varphi = 1$: Sei $g = x_{i_q} \cdots x_{i_1}$, $i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, n\}$

und $1 = \varphi(g) = s_{i_q} \cdots s_{i_1}$.

Dann

$a_{i_1} = s_{i_q} \cdots s_{i_1} a_{i_1} \in \Phi^+$, $s_{i_1} a_{i_1} = -a_{i_1} \in \Phi^-$

Damit ex. ein $1 \le k < q$ mit

$$s_{i_j} \cdots s_{i_1} a_{i_1} < 0 \text{ für } j \le k \text{ und}$$

$$s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_1} a_{i_1} > 0.$$

$-a_{i_{k+1}}$ ist die einzige WZ in Φ^- die unter $s_{i_{k+1}}$ positiv wird:

$$s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_1} a_{i_1} = a_{i_{k+1}}$$

$$\Rightarrow \quad s_{i_k} \cdots s_{i_1} a_{i_1} = -a_{i_{k+1}}$$

Da $s_{i_j} \cdots s_{i_1} a_{i_1} \in \Phi^+$ für $j \leq k$, folgt aus (2)

$$(x_{i_k} \cdots x_{i_2}) x_{i_1} (x_{i_k} \cdots x_{i_2})^{-1} = x_{i_{k+1}} .$$

$$\Rightarrow x_{i_k} \cdots x_{i_2} x_{i_1} = x_{i_{k+1}} \cdots x_{i_2} .$$

Also $\quad g = x_{i_q} \cdots x_{i_{k+1}} x_{i_{k+1}} \cdots x_{i_2}$.

Induktion nach der "Länge" q liefert $g = 1$ $\square$

Def Es sei $M = (m_{ij}) \in \mathbb{N}^{n \times n}$ eine Coxeter-Matrix die Gruppe

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid (x_i x_j)^{m_{ij}} = 1;\ 1 \leq i,j \leq n \rangle$$

heißt Coxeter-Gruppe.

Wir haben in (5.1) gezeigt: jede endliche Spiegelungsgruppe (= Weylgruppe eines WZS) ist eine Coxetergruppe.

Zeigen noch: Jede endliche Coxetergruppe ist eine endliche Spiegelungsgruppe (Weylg. eines WZS).

Bemerkung. Sei $M = (m_{ij}) \in \mathbb{N}^{n \times n}$ eine zerlegbare Coxetermatrix, d.h. es ex. eine Partition $\{1, \dots, n\} = I \cup J$, sodass die Mengen I und J im Coxetergraph unverbunden sind. Setze

$G_I = \langle x_i \mid i \in I \rangle$, $G_J = \langle x_j \mid j \in J \rangle$

Dann gilt $G = G_I \times G_J$. (ÜA)

Es genügt im Folgenden unzerlegbare Coxetermatrizen zu betrachten.

(5.2) <u>Satz</u> Es sei $M = (m_{ij}) \in \mathbb{N}^{n \times n}$ eine Coxetermatrix und $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ die dazugehörige Coxetergruppe. Sei $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ein n-dim. $\mathbb{R}$-Raum. Def. auf V eine symmetrische Bilinearform durch

$$(v_i, v_j) = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}} \; ; \; 1 \le i, j \le n.$$

und Endomorphismen S_i durch

$$S_i x = x - 2(x, v_i) v_i .$$

(a) Die S_i's sind orth. Spiegelungen. Es ex. ein Gruppenhomo. $D : G \to O(V)$ mit $D(x_i) = S_i$

(b) Sei M unzerlegbar. Dann gilt

$$C_{\mathrm{End}(V)}(D(G)) = \{ X \in \mathrm{End}(V) \mid X D(g) = D(g) X,\ g \in G \} = \mathbb{R} \mathbb{1} .$$

<u>Bem.</u> (a) Der Homomorphismus $D : G \to O(V)$ wird die natürliche oder geometrische Darstellung von G genannt.

(b) I.a. darf man <u>nicht</u> erwarten, daß V mit $(\ ,\ )$ zu einem euklidischen Raum wird. Nur richtig, wenn $|G| < \infty$ (nächster Satz).

Bew. (a) Eine Rechnung zeigt
$(S_i x, S_i y) = (x,y)$ (benutze $\mathcal{B}(v_i,v_i)=1$).
$\Rightarrow S_i \in O(V)$.
Um zu zeigen, daß ein Hom. $\varphi: G \to W = \langle S_1, \dots, S_n \rangle$ existiert, muß man $|S_i S_j| = m_{ij}$ zeigen:

Auf $\langle v_i, v_j \rangle$ wird S_i bzw. S_j durch
$\begin{pmatrix} -1 & \delta \\ & 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 & \\ \delta & -1 \end{pmatrix}$, $\delta = 2\cos\frac{\pi}{m_{ij}}$ dargestellt
und $S_i|_{\langle v_i,v_j\rangle^\perp} = S_j|_{\langle v_i,v_j\rangle^\perp} = \mathrm{id}$.
Sei χ das Char. Pol. von $S_i S_j|_{\langle v_i,v_j\rangle}$, so

$$\chi = X^2 + (2-\delta^2)X + 1 = (X-\varepsilon)(X-\bar\varepsilon)$$

wo $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m_{ij}}}$ $\Rightarrow |S_i S_j| = m_{ij}$

(b) Sei $X \in C_{\mathrm{End}(V)}(D(G))$. Dann fixiert X das Zentrum $\langle v_i \rangle$ von S_i also

$$X \triangleq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ bzgl. $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Sei $m_{ij} > 2$. Dann ist $S_i S_j S_i$ eine Spiegelung mit dem Zentrum $L = \langle v_j + c_i v_i \rangle$, $c_i \neq 0$.
Aus $X(L) = X$ folgt $\lambda_i = \lambda_j$. Da der Cox. graph zushgd. ist, folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$
$\Rightarrow X = \lambda \mathbb{1}$. $\square$

(5.3) <u>Lemma</u>. Sei V ein endl. dim. K-Raum, $G \leq GL(V)$, $C_{End(V)}(G) = K\mathbb{1}$. Seien b_1, b_2 zwei G-invariante Bilinearform, b_1 sei nichtentartet. Dann ex. ein $k \in K$ mit $b_2 = k\, b_1$.

<u>Bew.</u> Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis und Γ_i die Gramsche Matrix bzgl. b_i. Nach Voraussetzung

$\det \Gamma_1 \neq 0$ und $\quad D(g)\, \Gamma_i\, D(g)^t = \Gamma_i \quad$ für $i = 1, 2$.

Isb. $\quad D(g)^t\, \Gamma_1^{-1} = \Gamma_1^{-1} D(g^{-1})$

$$\Rightarrow \quad D(g^{-1})\, \Gamma_2\, \Gamma_1^{-1} = \Gamma_2\, D(g)^t\, \Gamma_1^{-1} = \Gamma_2\, \Gamma_1^{-1}\, D(g^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_2 \Gamma_1^{-1} = k\, \mathbb{1}_{n \times n} \quad \text{nach Vorauss.}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_2 = k\, \Gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \text{Beh.} \qquad \square$$

<u>Bem</u> Ist M unzerlegbar, G die Cox. gruppe zu M und b die symm. Bilinearform zur natürlichen Darstellung $D : G \to O(V)$. Nach (5-3) ist bis auf Äquivalenz b die einzige $D(G)$-invariante Bilinearform.

(5.4) <u>Satz</u>. Es sei M eine unzerlegbare Coxeter-Matrix und die dazugehörige Coxetergruppe $G = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ sei endlich. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Die geom. Darstellung $D : G \to O(V)$ ist treu

(b) Das Skalarprodukt b aus (5.2) ist positiv definit.

(c) $D(G)$ ist eine Weylgruppe vom Typ $A_m, B_n, \ldots, I_2(m)$.

<u>Bem.</u> Für (a) ist die Vorauss. $|G| < \infty$ entbehrlich.

Bew. Setze $W = D(G)$. Wegen $W = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$,
$1 \le i \le n$ ist W eine endliche Spiegelungsgruppe.
Sei $b_1 = (\ ,\ )$ die Bilinearform aus (5.2) und
$b_2 = \langle\ ,\ \rangle$ das pos. definite Skp. aus (1.4.a).
Wegen (5.3) gilt $b_1 = k\, b_2$, $k \in \mathbb{R}$.
Da $b_1(v_i, v_i) = 1 > 0$ ist $k > 0$. Damit ist oBdA
$b_1 = b_2$. Ferner ist W bzw. M vom
Typ $A_n, \ldots, J_2(m)$ nach 4.6. Also gilt (b) + (c)

zu (a) Setze $\Pi = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\Phi = W\Pi$. Offenbar
ist nach (1.3) ein WZS.
Π ist einfach in Φ:
Sei $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Pi})$, $\tilde{\Pi} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ in $\tilde{V}$ ein WZS mit
$W(\tilde{\Phi}) \cong W$ und o.E. $\|a_i\| = 1$.
Dann $|\tilde{s}_i \tilde{s}_j| = m_{ij} = |s_i s_j|$, wo $\tilde{s}_j = s_{a_j}$. Def.
$f: \tilde{V} \to V$, $\tilde{a}_i \mapsto v_i$ ist $\mathbb{R}$-Isom. und
$\tilde{w} = \tilde{s}_{i_1} \cdots \tilde{s}_{i_k}$ hat bzgl. $\tilde{\Pi}$ die gleiche Matrix wie
$w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ bzgl. Π. Ist also $\tilde{a} \in \tilde{\Phi}$,
$\Rightarrow \tilde{a} = \pm \sum \lambda_i \tilde{a}_i;\ \lambda_i \ge 0 \Rightarrow a = \pm \sum \lambda_i v_i \in \Phi$.
$\Rightarrow \Pi$ einfach in Φ (2.5.b).
Nach (5.1) hat nun W die Präsentation
$$\langle x_1, \ldots, x_n \mid (x_i x_j)^{m_{ij}} = 1, \text{ alle } i,j \rangle.$$
$\Rightarrow |G| = |W| \Rightarrow D: G \to W$ ist
ein Isomorphismus. $\square$

Bemerkung: Als Fazit unserer Diskussion:

Äquivalent ist:

(a) G ist eine endliche Spiegelungsgruppe.

(b) G ist Weylgruppe eines WZS.

(c) G ist eine endliche Coxetergruppe.

<u>Def.</u> Es sei (Φ, Π) ein WZS in V.
$T \in GL(V)$ heißt Automorphismus von Φ, falls $T(\Phi) = \Phi$. $A(\Phi)$ sei die Gruppe der Autom..

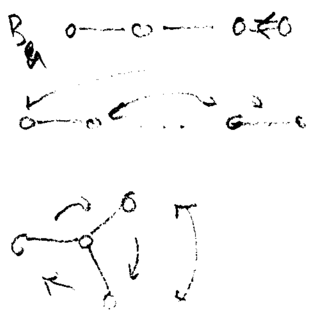
(5.5) <u>Prop.</u> (a) $W(\Phi) \trianglelefteq A(\Phi)$.

(b) Sei Φ irreduzibel (d.h. $\Gamma(\Phi)$ zusammenhängend).

Dann $W(\Phi)/A(\Phi) \cong G(\Phi)$.

Hier ist $G(\Phi)$ die Gruppe der Graphautomorphismen des Dynkindiagramms.

<u>Bsp.</u>

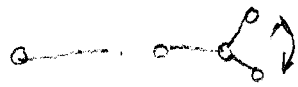


$G(B_n) = 1$.

$G(A_n) = C_2$

$G(D_4) \cong Sym(3)$

$G(D_n) \cong C_2$, $n > 4$.



$D(E_6) \cong C_2$. Alle übrigen Diagramme: $G(\Phi) = 1$.

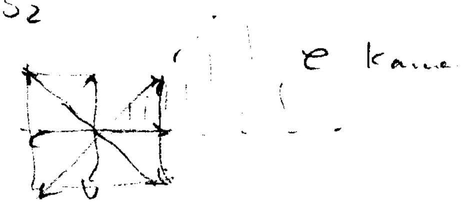
<u>Bew.</u> ÜA

Als nützlich hat sich außerdem der Begriff der <u>Kammer</u> erwiesen.

<u>Def.</u> Es sei Φ ein WZS in V. Sei $V' = V - \left(\bigcup_{a\in\Phi} a^{\perp}\right)$.

Die Zusammenhangskomponenten von V' sind die <u>Kammern</u> des WZS Φ.

<u>Bsp</u> $\Phi = B_2$



(5.6) <u>Satz</u> Es sei $\mathcal{C}$ eine Kammer von Φ.

(a) $\mathcal{C}$ ist konvex.

(b) Es existiert eine Abb. $e : \Phi \to \{\pm 1\}$ mit

$e(a)(a,x) > 0$ für $a \in \Phi$, $x \in \mathcal{C}$.

Ferner $e(-a) = -e(a)$.

(c) $\Phi_{\mathcal{C}} = \{a \in \Phi \mid e(a) = 1\}$ ist ein positives System in Φ.

(d) Sei $\tilde{\Phi} \subset \Phi$ positives Teilsystem.

Dann ist $\mathcal{C}_{\tilde{\Phi}} = \{x \in V' \mid (x, \tilde{a}) > 0,\ \tilde{a} \in \tilde{\Phi}\}$

eine Kammer von Φ.

(f) $\mathcal{C}$ ist ein Fundamentalbereich für W auf V', d.h.

sind $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ zwei Kammern, so existiert

genau ein $w \in W$ mit $\mathcal{C}' = w(\mathcal{C})$.

<u>Bew.</u> ÜA.