

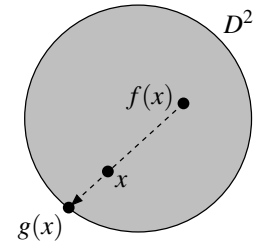
## 9. Anwendungen der Fundamentalgruppe

Nachdem wir mit Hilfe von Überlagerungen nun in der Lage sind, Fundamentalgruppen zu berechnen, wollen wir in diesem abschließenden Kapitel noch einige Konsequenzen hieraus untersuchen. Wir beginnen dazu mit dem folgenden Satz, der zwar sehr einfach zu formulieren, aber schon nicht mehr anschaulich offensichtlich ist.

**Satz 9.1 (Brouwerscher Fixpunktsatz).** *Jede stetige Abbildung  $f: D^2 \rightarrow D^2$  der Einheitskreisscheibe in sich hat einen Fixpunkt, also einen Punkt  $x \in D^2$  mit  $f(x) = x$ .*

*Beweis.* Angenommen, es gäbe eine stetige Abbildung  $f: D^2 \rightarrow D^2$  ohne Fixpunkt.

Wir konstruieren daraus dann eine Abbildung  $g: D^2 \rightarrow S^1$  wie folgt: Für  $x \in D^2$  ist nach unserer Annahme ja  $f(x) \neq x$ . Also gibt es einen eindeutig bestimmten von  $f(x)$  ausgehenden Strahl über  $x$ . Es sei nun  $g(x)$  wie im Bild rechts dargestellt der (eindeutig bestimmte) Schnittpunkt dieses Strahls mit dem Kreisrand. Beachte, dass die Funktion  $g$  auf dem Kreisrand  $S^1$  nach dieser Konstruktion genau die Identität ist — für diese Punkte trifft der Strahl den Kreisrand ja unabhängig von  $f(x)$  immer im Punkt  $x$ .



Wie ihr schon aus der Schule wisst, kann man diesen Schnittpunkt von einer Geraden mit einer Kreislinie natürlich konkret mit einer quadratischen Gleichung berechnen. Da uns die konkrete dabei herauskommende Formel nicht interessiert, werden wir sie hier allerdings nicht angeben. Wir benötigen nur, dass die Lösungsformel für quadratische Gleichungen bekanntlich ein *stetiger* Ausdruck in den Koeffizienten des Polynoms und die oben konstruierte Funktion  $g$  damit stetig ist.

Also lässt sich die Identität auf  $S^1$  zu einer stetigen Funktion  $g: D^2 \rightarrow S^1$  fortsetzen. Nach Aufgabe 6.4 bedeutet dies aber gerade, dass die Identität auf  $S^1$  dann auch homotop zu einer konstanten Abbildung sein muss — im Widerspruch zu Beispiel 8.16 (a). Damit war unsere Annahme der Existenz einer fixpunktfreien Abbildung auf  $D^2$  falsch.  $\square$

**Bemerkung 9.2** (Brouwerscher Fixpunktsatz in höheren Dimensionen).

- (a) Der Brouwersche Fixpunktsatz gilt nicht nur für  $D^2$ , sondern in der Tat auch für alle Einheitskugeln  $D^n$  — und zwar mit exakt demselben Beweis, den wir gegeben haben. Wir haben ihn nur deswegen nur für  $D^2$  formuliert, da wir den entscheidenden Punkt im Beweis, nämlich dass die Identität auf  $S^{n-1}$  nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist, nur für den Fall  $n = 2$  gezeigt haben (siehe Beispiel 8.16 (a) und Bemerkung 8.22).
- (b) Für Einheitskugeln in allgemeinen normierten Räumen ist die Aussage von Satz 9.1 jedoch falsch: Dazu können wir z. B. den Raum

$$l^2 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_n x_n^2 < \infty \right\}$$

aller quadratsummierbaren Folgen mit der zugehörigen Norm

$$\| (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \| = \sqrt{\sum_n x_n^2}$$

betrachten. Bezeichnet  $D \subset l^2$  die Einheitskugel in diesem Raum, so ist

$$f: D \rightarrow D, (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto \left( \sqrt{1 - \sum_n x_n^2}, x_0, x_1, \dots \right)$$

eine stetige Abbildung ohne Fixpunkt: Für einen Fixpunkt  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  müsste ja

$$\left( \sqrt{1 - \sum_n x_n^2}, x_0, x_1, \dots \right) = (x_0, x_1, x_2, \dots) \tag{*}$$

gelten, also zunächst einmal  $x_0 = x_1 = x_2 = \dots$  — d. h.  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  müsste eine konstante Folge sein. Aber die Nullfolge ist die einzige konstante Folge in  $l^2$ , und diese erfüllt in (\*) natürlich nicht die erste Gleichung  $\sqrt{1 - \sum_n x_n^2} = x_0$ .

12

Als weitere Anwendung von Fundamentalgruppen können wir nun auch einen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra angeben, also die Existenz von Nullstellen komplexer Polynome zeigen. Vielleicht habt ihr in anderen Vorlesungen, z. B. in der Einführung in die Funktionentheorie oder der Einführung in die Algebra, bereits einen solchen Beweis gesehen — der hier vorgestellte rein topologische Beweis hat jedoch den Vorteil, dass er deutlich allgemeiner ist, da er nicht nur auf Polynome anwendbar ist, sondern allgemein auf Funktionen, die sich als Summe von  $z \mapsto z^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  und einer im Vergleich zu  $z^n$  kleinen stetigen „Störfunktion“ schreiben lassen.

Die topologische Beweisidee ist dabei schnell erklärt: Bilden wir eine Kreislinie um 0 in  $\mathbb{C}$  mit der Funktion  $z \mapsto z^n$  ab, so laufen wir dabei offensichtlich  $n$ -mal um den Nullpunkt herum. Dies ändert sich auch nicht, wenn wir diese Funktion etwas stören, also z. B. zu einem Polynom vom Grad  $n$  abändern. Ziehen wir die ursprüngliche Kreislinie nun zu einem Punkt zusammen, so passiert dies dann auch mit der abgebildeten Kreislinie, so dass diese dabei notwendigerweise an einer Stelle einmal über den Nullpunkt gezogen werden muss — dort befindet sich dann eine Nullstelle.

### Satz 9.3.

- (a) Es sei  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  und  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$|g(z)| < R^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = R.$$

Dann hat die Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^n + g(z)$$

eine Nullstelle in der Kreisscheibe  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ .

- (b) (**Fundamentalsatz der Algebra**) Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

*Beweis.*

- (a) Angenommen, die Funktion  $f$  hätte keine Nullstelle vom Betrag höchstens  $R$ . Dann könnten wir die stetige Funktion

$$F: D^2 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \frac{f(Rz)}{|f(Rz)|} = \frac{(Rz)^n + g(Rz)}{|(Rz)^n + g(Rz)|}$$

betrachten, da der Nenner nie 0 werden kann. Es gilt:

- Die Funktion  $F|_{S^1}$  ist nach Aufgabe 6.4 homotop zu einer konstanten Abbildung, da sie sich zu einer stetigen Funktion  $F: D^2 \rightarrow S^1$  fortsetzen lässt.
- Die Funktion  $F|_{S^1}$  ist ebenfalls homotop zur Abbildung  $z \mapsto z^n$  — und zwar mit der Homotopie

$$H: S^1 \times I \rightarrow S^1, \quad (z, t) \mapsto \frac{(Rz)^n + t g(Rz)}{|(Rz)^n + t g(Rz)|},$$

denn nach Voraussetzung ist

$$|(Rz)^n + t g(Rz)| > |(Rz)^n| - |t g(Rz)| = R^n - t |g(Rz)| \stackrel{t \leq 1}{\geq} R^n - |g(Rz)| > 0$$

für alle  $z \in S^1$ , und der Nenner des angegebenen Bruches damit immer ungleich 0.

Da die Homotopie eine Äquivalenzrelation ist, wäre dann also auch die Abbildung  $z \mapsto z^n$  homotop auf  $S^1$  zu einer konstanten Abbildung. Genau wie in Beispiel 8.16 (a) ist dies aber ein Widerspruch zu  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ , da diese beiden Schleifen die Umlaufzahl  $n$  bzw. 0 haben. Also war unsere Annahme falsch, und  $f$  muss doch eine Nullstelle besitzen.

- (b) Wir können  $f = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  mit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  ohne Einschränkung als normiert annehmen und passend zu (a) die Funktion  $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  betrachten. Da bekanntlich

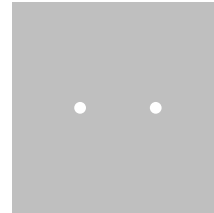
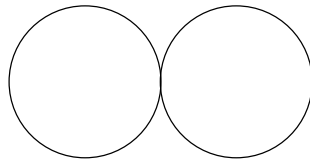
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |a_1|R + |a_0|}{R^n} = 0$$

gilt, gibt es ein  $R \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass dieser Quotient kleiner als 1 ist. Für ein solches  $R$  ist dann

$$|g(z)| \leq |a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |a_1|R + |a_0| < R^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = R,$$

und damit folgt die Existenz einer Nullstelle von  $f$  aus Teil (a). □

Für weitere Anwendungen benötigen wir noch eine andere oft nützliche Methode, um Fundamentalgruppen zu berechnen. Sie bietet sich vor allem dann an, wenn der betrachtete Raum als Vereinigung anderer Räume geschrieben werden kann, deren Fundamentalgruppen bereits bekannt sind. Das einfachste Beispiel hierfür ist wohl wie im Bild unten die Vereinigung zweier Kreislinien in einem Punkt, oder (dazu homotopieäquivalent) das Komplement von zwei Punkten in der Ebene. Von diesem Raum können wir die Fundamentalgruppe bisher noch nicht bestimmen.



Intuitiv würde man wahrscheinlich erwarten, dass die Homotopieklasse von Schleifen in diesen Räumen nun einfach durch zwei Umlaufzahlen gegeben ist — allerdings wissen wir schon, dass die Fundamentalgruppe nicht einfach  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sein kann, da sie nach Aufgabe 8.24 (c) nicht abelsch ist. In der Tat werden wir später in Beispiel 9.9 noch sehen, dass die Fundamentalgruppe dieses Raumes eine Gruppe ist, die ihr bisher vermutlich noch nicht kennt und die man sich als eine „nicht-abelsche Variante“ des Produkts  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  vorstellen kann.

Um den angekündigten Satz formulieren zu können, benötigen wir zunächst einmal zwei algebraische Vorbereitungen. Die erste davon konstruiert die eben schon erwähnte nicht-abelsche Variante des Produkts zweier Gruppen.

**Konstruktion 9.4** (Freies Produkt von Gruppen). Es seien  $(G, \bullet)$  und  $(H, \bullet)$  zwei Gruppen. Wir betrachten dann die Menge  $M$  aller endlichen Folgen mit Folgengliedern in der disjunkten Vereinigung  $G \sqcup H$ . Dabei wollen wir derartige Folgen einfach durch Hintereinanderschreiben der Folgenglieder notieren. Die Elemente von  $M$  haben also die Form  $a_1 a_2 \dots a_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , wobei jedes  $a_i$  für  $i = 1, \dots, n$  in  $G$  oder in  $H$  liegt (und wir  $G$  und  $H$  dabei als disjunkt annehmen, so dass jedes Folgenglied also eindeutig entweder in  $G$  oder in  $H$  liegt). Für den restlichen Teil der folgenden Konstruktion vereinbaren wir, dass  $g_i$  immer für ein Element aus  $G$  steht,  $h_i$  für ein Element aus  $H$ , und  $a_i$  für ein Element aus  $G \sqcup H$ , von dem nicht spezifiziert ist, ob es in  $G$  oder  $H$  liegt.

Aus naheliegenden Gründen bezeichnet man die Elemente von  $M$  auch als *Wörter* mit *Buchstaben* in  $G \sqcup H$ . Wir betrachten nun auf  $M$  die gemäß Konstruktion 5.1 von den folgenden Relationen erzeugte Äquivalenzrelation  $\sim$ :

- (a) Es ist

$$a_1 \dots a_n g_1 g_2 a_{n+1} \dots a_m \sim a_1 \dots a_n (g_1 \bullet g_2) a_{n+1} \dots a_m$$

und  $a_1 \dots a_n h_1 h_2 a_{n+1} \dots a_m \sim a_1 \dots a_n (h_1 \bullet h_2) a_{n+1} \dots a_m$

für alle  $0 \leq n \leq m$ , d. h. sind in dem betrachteten Wort zwei aufeinander folgende Buchstaben in der gleichen Gruppe, also beide in  $G$  oder beide in  $H$ , so können wir diese beiden Buchstaben durch den einen Buchstaben ersetzen, der genau die Verknüpfung dieser beiden Elemente in  $G$  bzw.  $H$  ist.

(b) Es ist

$$a_1 \cdots a_n e_G a_{n+1} \cdots a_m \sim a_1 \cdots a_n a_{n+1} \cdots a_m$$

und  $a_1 \cdots a_n e_H a_{n+1} \cdots a_m \sim a_1 \cdots a_n a_{n+1} \cdots a_m$

für alle  $0 \leq n \leq m$ , d. h. die neutralen Elemente  $e_G$  und  $e_H$  der beiden Gruppen können aus dem betrachteten Wort stets herausgestrichen werden.

Nach Konstruktion 5.1 der erzeugten Äquivalenzrelation bedeutet dies also gerade, dass zwei Wörter in  $M$  bezüglich  $\sim$  äquivalent zueinander sind, wenn sie durch eine endliche Folge von Operationen der beiden Typen (a) und (b) und ihrer Inversen auseinander hervorgehen.

Es sei nun  $G * H := M / \sim$  die Menge der Äquivalenzklassen dieser Relation. Um die Notationen nicht zu kompliziert werden zu lassen, vereinbaren wir, dass wir diese Äquivalenzklassen nicht mit einem Querstrich oder einer anderen speziellen Notation kennzeichnen, sondern sie einfach nur wie oben als Wörter schreiben, und dass alle solchen Wörter, die wir in Zukunft hinschreiben, für ihre Äquivalenzklassen unter  $\sim$  in  $G * H$  stehen sollen. So können wir also z. B.

$$g_1 g_1 h_1 g_2^{-1} g_2 = g_1^2 h_1 e_G = g_1^2 h_1 \in G * H$$

schreiben, wobei dies Wörter mit 5, 3 bzw. 2 Buchstaben sind und  $g_1^2$  für das Element  $g_1 \bullet g_1 \in G$  steht.

Nach dieser langen Konstruktion der Menge  $G * H$  ist es nun aber sehr einfach einzusehen, dass  $G * H$  mit dem einfachen Hintereinanderschreiben von Wörtern eine Gruppe ist. In der Tat sind alle Gruppenaxiome offensichtlich; das neutrale Element ist das leere Wort, und das zu einem Wort  $a_1 \cdots a_n$  inverse Element ist  $a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$ , wobei das Inverse  $a_i^{-1}$  für  $i = 1, \dots, n$  hierbei natürlich jeweils in  $G$  oder  $H$  zu nehmen ist, je nachdem ob  $a_i$  in  $G$  oder  $H$  liegt. Man bezeichnet  $G * H$  als das **freie Produkt** der Gruppen  $G$  und  $H$ .

**Beispiel 9.5.** Das freie Produkt  $G * H$  liefert schon für einfachste Fälle von  $G$  und  $H$  unendliche nicht-abelsche Gruppen, die von der Struktur her sehr kompliziert sind und sicher nicht zu irgend-etwas isomorph sind, was ihr in den Vorlesungen „Algebraische Strukturen“ und „Einführung in die Algebra“ schon einmal gesehen habt. Wir wollen uns daher hier damit begnügen, in zwei Fällen die Gruppenelemente etwas konkreter hinzuschreiben und ein paar einfache Rechnungen durchzuführen.

- (a)  $G = \mathbb{Z}$  und  $H = \mathbb{Z}$  (dies wird der für uns relevante Fall für die Fundamentalgruppen werden): Da wir im freien Produkt ja Elemente von  $G$  strikt von Elementen von  $H$  unterscheiden müssen, sollten wir diese Elemente hier nicht einfach für beide Gruppen als ganze Zahlen schreiben. Stattdessen seien  $g$  und  $h$  Erzeuger (mit unendlicher Ordnung) von  $G$  bzw.  $H$ , so dass also

$$G = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad H = \{h^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

Die Elemente von  $G * H$  sind dann nach Konstruktion „nicht-kommutative Monome“ in  $g, h, g^{-1}$  und  $h^{-1}$ . So ist z. B.  $g^2 h^{-3} g^{-1}$  ein Element von  $G * H$ , das von  $gh^{-3}$  verschieden ist. Die Verknüpfung erfolgt einfach durch „Multiplikation“ dieser Monome mit anschließendem Vereinfachen, wie z. B.

$$(g^2 h^{-3} g^{-1})(ghgh) = g^2 h^{-3} g^{-1} ghgh = g^2 h^{-3} hgh = g^2 h^{-2} gh,$$

wobei dieser letzte Ausdruck nicht weiter vereinfacht werden kann.

- (b)  $G = \mathbb{Z}_2$  und  $H = \mathbb{Z}_2$ : Sind  $g$  und  $h$  wie in (a) Erzeuger von  $G$  und  $H$ , die hier aber jeweils Ordnung 2 haben, so dass also

$$G = \{e, g\} \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{und} \quad H = \{e, h\} \cong \mathbb{Z}_2$$

ist, so sind die Elemente von  $G * H$  genau das leere Wort sowie

$$g, gh, ghg, ghgh, \dots \quad \text{und} \quad h, hg, hgh, hghg, \dots$$

Jedes Wort *ungerader Länge* hat dabei Ordnung 2 (es ist z. B.  $(ghg)(ghg) = ghgghg = e$ ), während die nicht-leeren Wörter *gerader Länge* Ordnung  $\infty$  haben. Schon in diesem Beispiel, bei dem  $G$  und  $H$  die kleinsten nicht-trivialen Gruppen sind, kommt für  $G * H$  also eine komplizierte nicht-abelsche Gruppe heraus.

Die zweite algebraische Vorbereitung, die wir benötigen werden, ist die Konstruktion von erzeugten Normalteilern.

**Konstruktion 9.6** (Erzeugte Normalteiler). Es sei  $M$  eine Teilmenge einer Gruppe  $G$ . Wir wissen aus den „Algebraischen Strukturen“, dass es dann die von  $M$  erzeugte Untergruppe

$$\langle M \rangle := \bigcap_{\substack{U \leq G \\ \text{mit } U \supset M}} U$$

gibt, die man sich vorstellen kann als die kleinste Untergruppe von  $G$ , die  $M$  enthält [G1, Definition 3.11 und Lemma 3.12].

Dass diese Konstruktion funktioniert und auch wirklich eine Untergruppe liefert, liegt dabei daran, dass ein solcher Schnitt von beliebig vielen Untergruppen von  $G$  stets wieder eine Untergruppe von  $G$  ist. Dementsprechend funktioniert eine analoge Konstruktion des Erzeugnisses einer Menge für eine bestimmte mathematische Struktur (wie hier für Untergruppen) immer dann, wenn diese Struktur abgeschlossen unter beliebiger Durchschnittsbildung ist. Ihr kennt z. B. aus der linearen Algebra den völlig analogen Begriff des von einer Menge von Vektoren erzeugten Untervektorraums, der ja ebenfalls der kleinste Untervektorraum ist, der die gegebenen Vektoren enthält.

Im Folgenden benötigen wir noch einen anderen Fall einer solchen Konstruktion: Auch der Schnitt von Normalteilern in einer Gruppe ist wieder ein Normalteiler, und daher können wir zu einer beliebigen Teilmenge  $M$  einer Gruppe  $G$  den von  $M$  **erzeugten Normalteiler**

$$\langle\langle M \rangle\rangle := \bigcap_{\substack{U \trianglelefteq G \\ \text{mit } U \supset M}} U$$

betrachten, den man sich wiederum als den kleinsten Normalteiler von  $G$  vorstellen kann, der  $M$  enthält.

**Beispiel 9.7.**

- (a) In einer abelschen Gruppe  $G$  ist natürlich  $\langle\langle M \rangle\rangle = \langle M \rangle$  für alle  $M \subset G$ , da Normalteiler und Untergruppen dann übereinstimmen.
- (b) In der symmetrischen Gruppe  $G = S_3$  ist die von der Transposition  $(1\ 2)$  erzeugte Untergruppe  $\langle (1\ 2) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2)\}$ . Nun sind die Normalteiler von  $S_3$  aber bekanntlich nur die alternierende Gruppe  $A_3$  und die gesamte Gruppe  $S_3$  — und da  $(1\ 2) \notin A_3$  gilt, ist der kleinste Normalteiler, der diese Transposition enthält, also  $\langle\langle (1\ 2) \rangle\rangle = S_3$ . In diesem Fall stimmen die Begriffe der erzeugten Untergruppe und des erzeugten Normalteilers also nicht überein.

Mit diesen beiden Vorbereitungen können wir nun den angekündigten Satz formulieren.

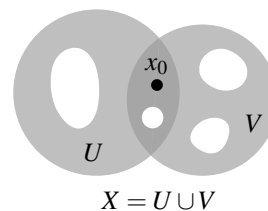
**Satz 9.8 (Satz von Seifert und van Kampen).** *Es seien  $U$  und  $V$  zwei offene Teilmengen eines topologischen Raumes, so dass  $X = U \cup V$  gilt und  $U \cap V$  wegzusammenhängend ist. Ferner sei  $x_0 \in U \cap V$ . Dann gilt*

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)) / N,$$

wobei

$$N := \langle\langle i_*[\alpha] j_*[\alpha]^{-1} : [\alpha] \in \pi_1(U \cap V, x_0) \rangle\rangle$$

und  $i: U \cap V \rightarrow U$  und  $j: U \cap V \rightarrow V$  die beiden Inklusionsabbildungen von  $U \cap V$  in  $U$  bzw.  $V$  sind.



*Beweisidee.* Da der formale Beweis dieses Satzes recht technisch ist, wollen wir hier nur die Idee dafür angeben, warum die Fundamentalgruppe von  $X$  die im Satz behauptete Form hat.

Dass  $\pi_1(X, x_0)$  durch das freie Produkt  $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$  (bzw. einen Quotienten davon) beschrieben werden kann, bedeutet zunächst einmal,

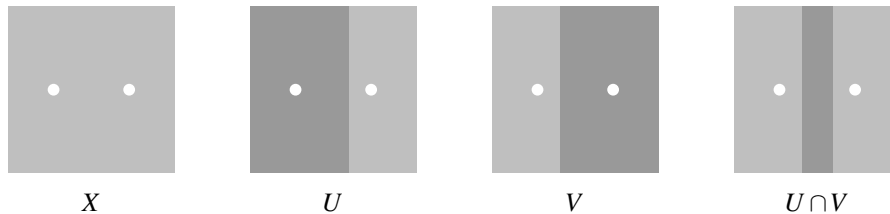
- dass jede Schleife in  $X$  als Zusammensetzung von Schleifen in  $U$  und Schleifen in  $V$  geschrieben werden kann und somit ein Wort in  $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$  bildet (dies haben wir bereits in Aufgabe 8.13 (a) gesehen); und
- dass diese Zusammensetzung von Schleifen gemäß Aufgabe 8.24 (c) nicht abelsch ist.

Der Normalteiler  $N$  ist offensichtlich nur dann nicht-trivial, wenn  $U \cap V$  nicht einfach zusammenhängend ist, also eine nicht-triviale Schleife  $\alpha$  besitzt. In diesem Fall können wir  $\alpha$  natürlich als Schleife sowohl in  $U$  als auch in  $V$  auffassen, d. h. es gibt die beiden Elemente  $i_*[\alpha] \in \pi_1(U, x_0)$  und  $j_*[\alpha] \in \pi_1(V, x_0)$ . Diese beiden Elemente beschreiben geometrisch *dieselbe* Schleife in  $X$ , sind im freien Produkt  $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$  aber *verschieden*, da wir dort ja strikt zwischen Elementen der ersten und der zweiten Gruppe unterscheiden müssen. Um das zu kompensieren, müssen wir also zu einer geeigneten Faktorgruppe von  $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$  übergehen, in der wir  $i_*[\alpha]$  und  $j_*[\alpha]$  für jede Schleife  $\alpha$  in  $U \cap V$  miteinander identifizieren. Dies tut genau das Herausteilen von  $N$ : Für alle  $\alpha$  wie oben ist ja das zweibuchstabile Wort  $i_*[\alpha] j_*[\alpha]^{-1}$  in  $N$ , d. h.  $i_*[\alpha] j_*[\alpha]^{-1}$  gleich dem leeren Wort und damit  $i_*[\alpha] = j_*[\alpha]$  modulo  $N$ .

Einen vollständigen Beweis des Satzes von Seifert und van Kampen könnt ihr z. B. in [H, Kapitel 1.2] finden.  $\square$

**Beispiel 9.9.** Der einfachste Fall von Satz 9.8 ist natürlich der, in dem  $U \cap V$  einfach zusammenhängend und damit  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$  ist.

- (a) Für die doppelt gelochte Ebene  $X = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  können wir  $U$  und  $V$  wie im folgenden Bild wählen, wo  $U$ ,  $V$  und  $U \cap V$  in den rechten drei Bildern dunkel eingezeichnet sind.

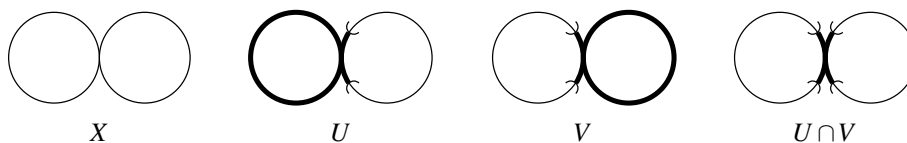


Dann sind  $U$  und  $V$  homotopieäquivalent zur einfach gelochten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  und haben damit nach Beispiel 7.15 Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z}$ . Da  $U \cap V$  einfach zusammenhängend ist, gilt nach Satz 9.8 für die (nach Satz 7.8 vom Basispunkt unabhängige) Fundamentalgruppe von  $X$

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

13

- (b) Ist  $X$  der Raum, der durch Zusammenkleben von zwei Kreislinien in einem Punkt entsteht, so ist dieser homotopieäquivalent zu  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  und muss damit nach Satz 7.14 ebenfalls die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  haben. Wollen wir dies direkt mit dem Satz von Seifert und van Kampen zeigen, so können wir für  $U$  und  $V$  jedoch nicht die beiden Kreislinien nehmen, da dies keine offenen Mengen in  $X$  sind. Stattdessen müssen wir bei beiden Kreislinien wie im Bild unten noch eine kleine offene Umgebung des Klebepunktes mit hinzunehmen.



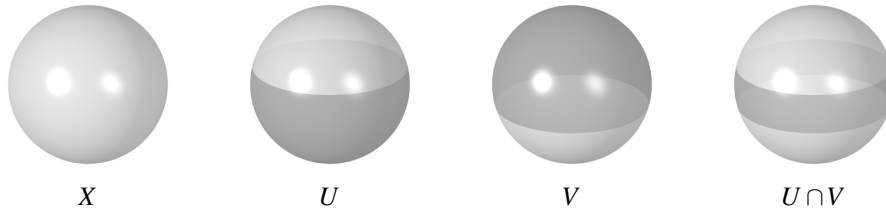
Dies ändert jedoch die Homotopieklassen von  $U$  und  $V$  nicht —  $S^1$  ist ein Deformationsretrakt von  $U$  und  $V$ , und  $U \cap V$  ist als kontrahierbarer Raum nach Beispiel 7.15 (a) einfach zusammenhängend. Wir erhalten also wieder

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

**Beispiel 9.10** (Die Fundamentalgruppen der Sphären). In Aufgabe 8.13 (c) haben wir bereits gesehen, dass die Fundamentalgruppen der Sphären  $S^n$  für  $n \geq 2$  trivial sind. Dies ist in der Tat ein Spezialfall des Satzes von Seifert und van Kampen: Zerlegt man (wie im Bild unten für den Fall  $n = 2$  dargestellt) die Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  in die Teile

$$U = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} < \frac{1}{2}\} \quad \text{und} \quad V = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} > -\frac{1}{2}\},$$

so sind  $U$  und  $V$  kontrahierbar, und damit ist  $\pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \{1\} * \{1\} = \{1\}$ . Auch wenn  $U \cap V$  nicht notwendig einfach zusammenhängend ist (im Bild unten für  $n = 2$  ist ja  $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ , da die Kreislinie des Äquators ein Deformationsretrakt von  $U \cap V$  ist), ist der Normalteiler  $N$  in Satz 9.8 damit natürlich notwendigerweise trivial, und wir erhalten auch  $\pi_1(X) \cong \{1\}$ .



Natürlich ist es auch anschaulich einleuchtend, dass sich jede Schleife in  $S^n$  für  $n \geq 2$  zu einem Punkt zusammenziehen lässt: Da  $S^n \setminus \{P\}$  für jeden Punkt  $P \in S^n$  kontrahierbar ist, kann man ja jede Schleife in  $S^n$ , die einen Punkt  $P$  nicht trifft, in  $S^n \setminus \{P\}$  und damit auch in  $S^n$  zusammenziehen. Der einzige Grund, warum dieses einfache Argument kein exakter Beweis ist, ist die Existenz von geschlossenen Peano-Kurven analog zu Satz 2.18, die den gesamten Raum  $S^n$  ausfüllen und das obige Argument daher für keinen Punkt  $P$  zulassen.

**Aufgabe 9.11.** Es sei  $A \subset \mathbb{R}^2$  eine endliche Menge mit  $n := |A|$ . Zeige, dass

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus A) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n\text{-mal}}.$$

**Aufgabe 9.12.** Zu einer Gruppe  $G$  sei  $G' := \langle aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G \rangle \leq G$  die sogenannte *Kommutatoruntergruppe* von  $G$ . Man beweise:

- (a)  $G'$  ist ein Normalteiler von  $G$ .
- (b) Ist  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  und  $G = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$  das  $n$ -fache freie Produkt von  $\mathbb{Z}$  mit sich selbst, so ist  $G/G' \cong \mathbb{Z}^n$ .
- (c) Sind  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  endlich mit  $|A| \neq |B|$ , so sind die Räume  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  und  $\mathbb{R}^2 \setminus B$  nicht homöomorph zueinander.

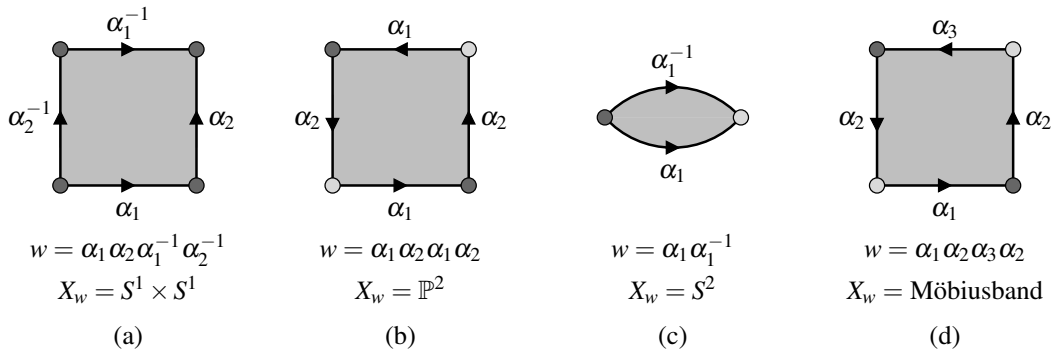
Mit dem Satz 9.8 von Seifert und van Kampen können wir nun von vielen topologischen Räumen die Fundamentalgruppe bestimmen, u. a. von allen kompakten 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten wie in Aufgabe 5.26. Wir benötigen dazu die folgende Konstruktion.

**Konstruktion 9.13.**

- (a) Wir bezeichnen das  $n$ -fache freie Produkt von  $\mathbb{Z}$  mit sich selbst als  $\mathbb{Z}^{*n}$ . Dabei schreiben wir für  $i = 1, \dots, n$  einen Erzeuger des  $i$ -ten Faktors als  $\alpha_i$ , so dass wir Wörter in den Buchstaben  $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$  als Elemente von  $\mathbb{Z}^{*n}$  auffassen können. Wir werden dabei im Folgenden immer annehmen, dass in einem solchen Wort jeder Buchstabe  $\alpha_i$  oder  $\alpha_i^{-1}$  mindestens einmal vorkommt (ansonsten reduzieren wir  $n$  entsprechend).

- (b) Zu einem Wort  $w$  der Länge  $m \in \mathbb{N}_{>1}$  in  $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$  sei  $P_m$  ein  $m$ -Eck. Wir beschriften die Kanten von  $P_m$  der Reihe nach mit den Buchstaben von  $w$ . Den topologischen Raum, den wir erhalten, indem wir die Kanten von  $P_m$  entsprechend dieser Beschriftung miteinander identifizieren, bezeichnen wir mit  $X_w$  (siehe Beispiel 9.14).
- (c) Wir nennen zwei Ecken  $x$  und  $y$  von  $P_m$  äquivalent bezüglich  $w$  und schreiben dies als  $x \sim y$ , wenn sie in  $X_w$  miteinander identifiziert werden.

**Beispiel 9.14.** Das folgende Bild zeigt einige Wörter  $w$  und die zugehörigen Räume  $X_w$  wie in Konstruktion 9.13 (b). Wir haben die Kanten entgegen dem Uhrzeigersinn mit den Buchstaben von  $w$  beschriftet und dabei bei der unteren Kante begonnen. Dementsprechend stehen  $\alpha_i$  und  $\alpha_i^{-1}$  für Kanten, die beim Verkleben entgegen bzw. im Uhrzeigersinn orientiert sind. Ecken, die im Sinne von Konstruktion 9.13 (c) äquivalent sind, sind mit der gleichen Farbe gekennzeichnet. Das Möbiusband, der Torus und die reelle projektive Ebene ergeben sich genauso wie in Beispiel 5.9 (b) und (c).



Beachte, dass  $X_w$  genau dann eine Mannigfaltigkeit ist, wenn in  $w$  jedes  $\alpha_i$  genau zweimal (als  $\alpha_i$  oder  $\alpha_i^{-1}$ ) vorkommt, also wenn immer genau zwei Kanten miteinander verklebt werden (so wie in den Fällen (a), (b) und (c) oben), da  $X_w$  nur dann an einem Punkt einer solchen Kante lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  ist. Umgekehrt kann man zeigen, dass jede zusammenhängende, kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit von der Form  $X_w$  für ein geeignetes  $w$  ist.

Wir wollen nun als Erstes zeigen, dass wir ein gegebenes Wort in diesem Fall immer so abändern können, dass alle Ecken von  $P_m$  im Sinne von Konstruktion 9.13 (c) zueinander äquivalent werden — diese Eigenschaft werden wir für die Berechnung der Fundamentalgruppe in Satz 9.17 benötigen.

**Lemma 9.15.** *Es sei  $w$  ein Wort in  $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$ , in dem jedes  $\alpha_i$  genau zweimal (als  $\alpha_i$  oder  $\alpha_i^{-1}$ ) vorkommt. Ferner nehmen wir an, dass  $X_w \not\cong S^2$ .*

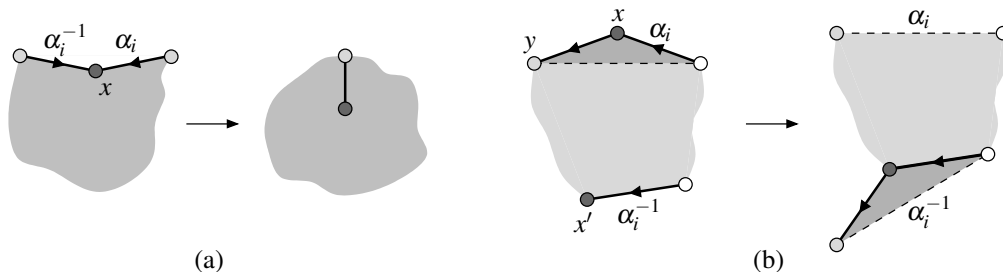
*Dann gibt es ein Wort  $w'$  mit  $X_{w'} \cong X_w$ , so dass alle Ecken des zugehörigen Vielecks bezüglich  $w'$  zueinander äquivalent sind.*

*Beweis.* Der Beweis ist konstruktiv und benutzt die folgenden beiden Modifikationen des Vielecks:

- (a) Gibt es in  $P_m$  eine Ecke  $x$ , die nur zu sich selbst äquivalent ist, so muss dort eine Kante  $\alpha_i$  direkt an die zugehörige inverse Kante  $\alpha_i^{-1}$  stoßen. Sind dies die einzigen beiden Kanten in  $X_w$ , so ist  $X_w \cong S^2$  nach Beispiel 9.14 (c), was wir ausgeschlossen haben. Ansonsten können wir diese beiden Kanten wie im Bild unten links miteinander verkleben und erhalten ein neues Vieleck mit zwei Seiten weniger, das  $x$  nicht mehr als Ecke besitzt. Im Wort  $w$  entspricht dies einfach dem Weglassen der beiden Buchstaben  $\alpha_i$  und  $\alpha_i^{-1}$ .
- (b) Gibt es in  $P_m$  zwei verschiedene zueinander äquivalente Ecken  $x$  und  $x'$  sowie eine weitere dazu nicht äquivalente Ecke  $y$ , so können wir zunächst annehmen, dass  $x$  und  $y$  benachbart sind. Wir betrachten im Folgenden wie im Bild unten rechts den Fall, dass die an  $x$ , aber nicht an  $y$  grenzende Kante  $\alpha_i$  ist und in  $w$  noch an anderer Stelle der Buchstabe  $\alpha_i^{-1}$  auftritt (der Fall einer doppelt auftretenden Kante  $\alpha_i$  ist analog). Schneiden wir das Vieleck dann entlang der gestrichelt eingezeichneten Linie vom Startpunkt von  $\alpha_i$  nach  $y$  auf, so können wir  $\alpha_i$  mit  $\alpha_i^{-1}$  verkleben und erhalten ein neues Vieleck, das den gleichen topologischen

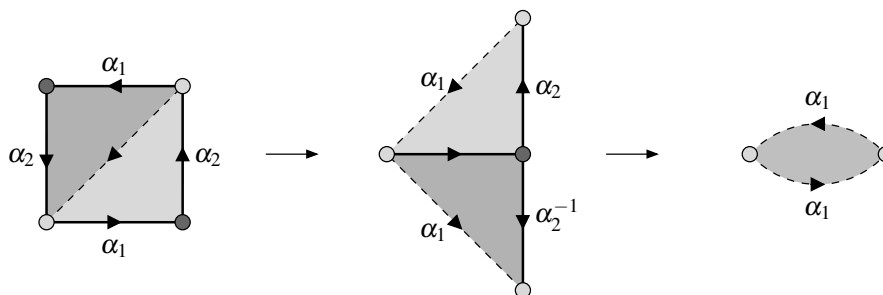


Raum beschreibt und in dem die gestrichelte Linie zu zwei Außenkanten geworden ist (die wir nun mit  $\alpha_i$  und  $\alpha_i^{-1}$  bezeichnen können). Gleichzeitig wurde die Äquivalenzklasse von  $x$  um ein Element verringert (da  $x$  und  $x'$  nun derselbe Punkt sind) und die von  $y$  dafür um ein Element erweitert.



Solange noch verschiedene Äquivalenzklassen von Eckpunkten vorhanden sind, können wir also wiederholt Schritt (b) ausführen, um eine dieser Klassen immer weiter zu verkleinern und letztlich einelementig zu machen, und diese Klasse dann mit Schritt (a) eliminieren.  $\square$

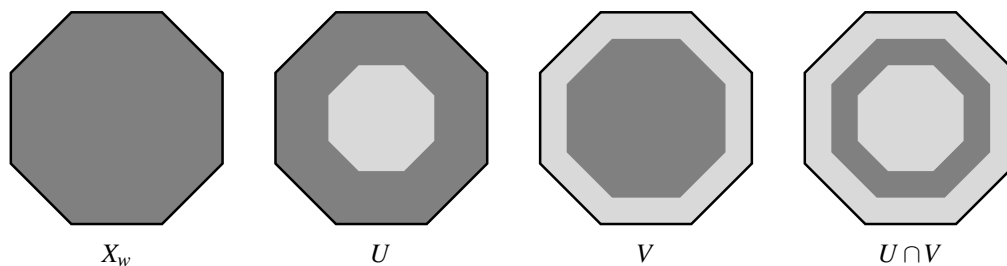
**Beispiel 9.16.** Beginnen wir mit dem Wort  $w = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$  mit  $X_w = \mathbb{P}^2$  wie in Beispiel 9.14 (b), so können wir dort die dunkel markierte Äquivalenzklasse von Eckpunkten eliminieren, indem wir wie im folgenden Bild das Quadrat diagonal aufschneiden, entlang der horizontalen Kanten  $\alpha_1$  zusammenkleben (beachte, dass eines der Dreiecke dabei gespiegelt werden muss, um die Kanten mit der korrekten Orientierung zu identifizieren), und anschließend die Kanten  $\alpha_2$  und  $\alpha_2^{-1}$  verkleben. Es entsteht so das neue Wort  $w' = \alpha_1 \alpha_1$ , für das  $X_{w'} \cong X_w = \mathbb{P}^2$  gilt, und für das nur noch eine Äquivalenzklasse von Eckpunkten existiert.



**Satz 9.17** (Fundamentalgruppe von Flächen). *Es sei  $w$  ein Wort in  $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$ , so dass alle Ecken des zugehörigen Vielecks bezüglich  $w$  zueinander äquivalent sind. Dann gilt*

$$\pi_1(X_w) \cong \mathbb{Z}^{*n} / \langle\langle w \rangle\rangle.$$

*Beweis.* Wir benutzen den Satz 9.8 von Seifert und van Kampen für die im Bild unten dargestellte Zerlegung  $X_w = U \cup V$ : Für  $U$  wählen wir eine Menge, die in  $P_m$  einer ringförmigen Umgebung des Randes entspricht; und für  $V$  nehmen wir eine zu einer Kreisscheibe homöomorphe Teilmenge im Inneren des Vielecks, so dass  $U \cap V$  homöomorph zu einem Kreisring ist.



Die Menge  $U$  ist dann homotopieäquivalent zum Bild des Randes von  $P_m$  in  $X_w$ . Dieser besteht aus dem (nach Voraussetzung einzigen) Eckpunkt des Vielecks zusammen mit den angehefteten Schleifen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , und hat damit wie in Beispiel 9.9 (b) die Fundamentalgruppe  $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}^{*n}$ . Da  $V$  kontrahierbar ist, gilt  $\pi_1(V) = \{1\}$ .

Als Raum, der zu einer Kreislinie  $S^1$  homotopieäquivalent ist, gilt  $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ . In  $U$  ist der Erzeuger dieser Fundamentalgruppe homotop zu einem geschlossenen Weg, der einmal entlang des Randes von  $P_m$  entlang läuft, und hat dort damit die Klasse  $w$ . Aus Satz 9.8 folgt damit wie behauptet

$$\pi_1(X_w) \cong (\pi_1(U) * \pi_1(V)) / \langle\langle w \rangle\rangle \cong \mathbb{Z}^{*n} / \langle\langle w \rangle\rangle. \quad \square$$

**Beispiel 9.18.**

(a) Für  $w = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}$  ist  $X_w$  nach Beispiel 9.14 (a) ein Torus. Mit Satz 9.17 erhalten wir

$$\pi_1(X_w) \cong \mathbb{Z}^{*2} / \langle\langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} \rangle\rangle$$

und damit  $\pi_1(X_w) \cong \mathbb{Z}^2$  in Übereinstimmung mit Beispiel 8.16 (b), da das Herausteilen von  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}$  genau dazu führt, dass im Quotienten  $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1$  gilt und wir somit eine freie abelsche Gruppe mit zwei Erzeugern erhalten.

(b) Für  $w = \alpha_1 \alpha_1$  ist  $X_w = \mathbb{P}^2$  nach Beispiel 9.16. Satz 9.17 ergibt

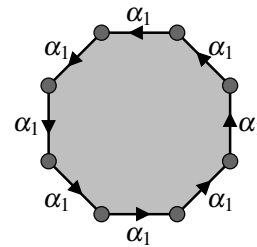
$$\pi_1(X_w) \cong \mathbb{Z} / \langle\langle \alpha_1^2 \rangle\rangle \cong \mathbb{Z} / \langle \alpha_1^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

wie in Beispiel 8.16 (c).

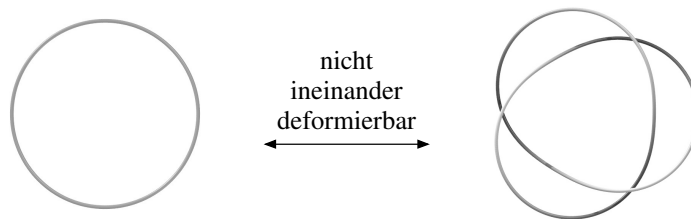
(c) Setzen wir  $w = \alpha_1^n$  (mit dem im Bild rechts eingezeichneten Raum  $X_w$ ), so ist  $X_w$  für  $n > 2$  nach Beispiel 9.14 keine Mannigfaltigkeit. Dennoch bilden aber auch hier alle Ecken eine einzige Äquivalenzklasse (da sie alle der gemeinsame Start- und Endpunkt der Kante  $\alpha_1$  sind), und damit besagt Satz 9.17, dass in diesem Fall analog zu (b)

$$\pi_1(X_w) \cong \mathbb{Z} / \langle\langle \alpha_1^n \rangle\rangle \cong \mathbb{Z}_n$$

gilt.



Zum Abschluss wollen wir als Anwendung unserer Ergebnisse noch kurz skizzieren, wie Fundamentalgruppen in der sogenannten Knotentheorie verwendet werden können. In der Knotentheorie geht es darum, von in den  $\mathbb{R}^3$  eingebetteten Schleifen zu untersuchen, ob sie ohne Selbstüberkreuzungen ineinander deformiert werden können. Stellt man sich z. B. die folgenden beiden Schleifen als Schnüre in  $\mathbb{R}^3$  vor, so ist — obwohl sie als topologische Räume natürlich beide homöomorph zu  $S^1$  sind — anschaulich einleuchtend, dass man die eine nicht in die andere deformieren kann, da die rechte Schnur „verknotet“ ist.



Auch wenn man es zunächst einmal nicht erwarten würde, hat die Knotentheorie durchaus Anwendungen außerhalb der Mathematik — z. B. in der Biologie oder Chemie, wo Molekülketten derartige Formen haben können. Lassen sich dann zwei solche Molekülketten nicht ineinander deformieren, so stellen sie letztlich verschiedene Ketten dar und können auch unterschiedliche chemische Eigenschaften haben (z. B. wenn sie versuchen, sich mit anderen derartigen Ketten zu verbinden), obwohl sie unter Vernachlässigung ihrer Lage im Raum exakt dieselbe Molekülstruktur haben.

Aus mathematischer Sicht stellt sich natürlich vor allem erst einmal die Frage, wie man herausfinden kann, ob zwei gegebene Schleifen ineinander deformierbar sind oder nicht. Im obigen Beispielbild

war das zwar noch anschaulich gut zu erkennen, aber für kompliziertere Schleifen ist das gar nicht mehr so einfach zu sehen — wie ja sicher jeder weiß, der schon einmal versucht hat, ein völlig verknottetes Verlängerungskabel zu entwirren. Und natürlich wollen wir als Mathematiker auch einen Beweis dafür haben, dass eine gewisse Schleife verknottet ist oder nicht.

Bevor wir kurz zeigen, wie Fundamentalgruppen bei dieser Fragestellung helfen können, sollten wir aber zuerst einmal exakt definieren, was die mathematischen Objekte sind, die wir untersuchen wollen. Um hinterher ein einfacheres Beispiel angeben zu können, erlauben wir dafür im Gegensatz zur obigen Diskussion Vereinigungen von mehreren Schleifen im Raum.

**Definition 9.19** (Knoten).

- (a) Für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei  $X_n = S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1$  die disjunkte Vereinigung von  $n$  Kreislinien. Ist dann  $f: X_n \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetige Abbildung, die ein Homöomorphismus auf das Bild  $f(X_n)$  ist, so heißt dieses Bild ein **Knoten** mit  $n$  Komponenten.
- (b) Zwei Knoten  $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$  heißen *äquivalent*, wenn es eine Homotopie  $H: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibt, so dass gilt:
- $H(\cdot, 0) = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ ;
  - $H(\cdot, t): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist ein Homöomorphismus für alle  $t \in I$ ;
  - $H(K_1, 1) = K_2$ .

Mit anderen Worten sind  $K_1$  und  $K_2$  äquivalent zueinander, wenn man den einen durch Verformung des umgebenden Raumes in den anderen überführen kann.

**Beispiel 9.20.** Das folgende Bild zeigt zwei Knoten mit jeweils zwei Komponenten: zwei unverschlungene und zwei verschlungene Kreislinien.



(a) zwei unverschlungene Kreislinien

(b) zwei verschlungene Kreislinien

**Bemerkung 9.21** (Unterscheidung von Knoten durch Fundamentalgruppen). In diesem Beispiel 9.20 ist es noch offensichtlicher als bei der oben betrachteten Schleife, dass diese beiden Knoten nicht äquivalent sind, also nicht ineinander deformiert werden können. Aber wie kann man das mathematisch exakt beweisen?

Für beliebige Knoten ist dies eine sehr schwierige (und in der Tat sogar noch ungelöste) Frage. In unserem konkreten Beispiel genügt aber schon ein recht einfaches Kriterium zur Unterscheidung der beiden Knoten. Beachte dazu, dass es für zwei äquivalente Knoten  $K_1$  und  $K_2$  nach Definition 9.19 (b) in jedem Fall einen Homöomorphismus  $H(\cdot, 1): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibt, der  $K_1$  auf  $K_2$  abbildet, und damit insbesondere auch einen Homöomorphismus zwischen  $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$  und  $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$ . Sind die beiden Knoten äquivalent, müssen also in jedem Fall die Fundamentalgruppen  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1)$  und  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_2)$  übereinstimmen.

Wir wollen nun sehen, dass dies in Beispiel 9.20 nicht der Fall ist und die beiden Knoten damit nicht äquivalent sein können.

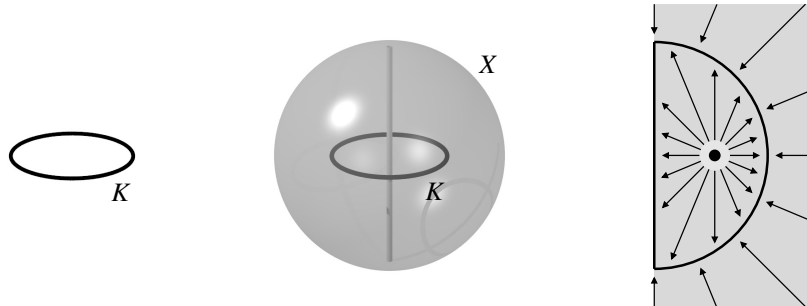
**Beispiel 9.22.** In diesem Beispiel werden wir für verschiedene Knoten  $K$  die Fundamentalgruppe  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$  des Komplements berechnen.

- (a) Es sei  $K$  eine einfache unverknottete Kreislinie wie im Bild unten links. Dann ist wie im mittleren Bild der Raum

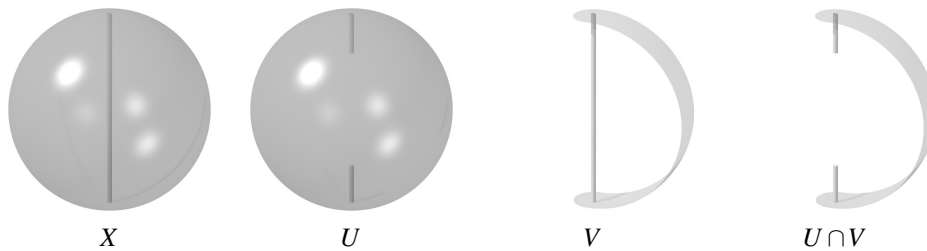
$$X = S^2 \cup \{(0, 0, z) : |z| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

also die Kugeloberfläche zusammen mit einem Durchmesser durch  $K$ , ein Deformationsretrakt von  $\mathbb{R}^3 \setminus K$ . Dies sieht man wohl am einfachsten, wenn man einen Halbraum betrachtet,

der durch den obigen Durchmesser begrenzt wird: Ein solcher Halbraum schneidet  $K$  in einem Punkt und  $X$  in einem Halbkreis zusammen mit seinem Durchmesser. Die Deformationsretraktion auf jedem solchen Halbraum ist im Bild unten rechts eingezeichnet: Die Punkte außerhalb von  $S^2$  werden radial auf die Kugeloberfläche deformiert, und die Punkte innerhalb (die nicht auf  $K$  liegen) von innen an die Kugeloberfläche oder den Durchmesser von  $X$  gedrückt.



Nach Satz 7.14 (b) ist nun also  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(X)$ . Die Fundamentalgruppe von  $X$  schließlich können wir wieder mit der folgenden Zerlegung aus dem Satz 9.8 von Seifert und van Kampen berechnen:



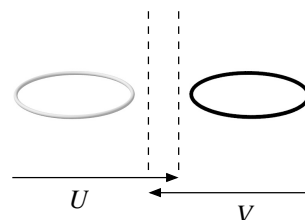
$U$  hat die Sphäre  $S^2$  als Deformationsretrakt und damit nach Beispiel eine triviale Fundamentalgruppe. Der Raum  $V$  dagegen ist homotopieäquivalent zu einer Kreislinie und hat daher Fundamentalgruppe  $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$ . Der Durchschnitt  $U \cap V$  schließlich ist kontrahierbar und damit einfach zusammenhängend. Mit Satz 9.8 ergibt sich also

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z},$$

wobei wir uns dieses Element von  $\mathbb{Z}$  als „Umlaufzahl durch den Durchmesser von  $X$ “ vorstellen können.

Beachte, dass wir für  $U$  und  $V$  nicht einfach die Kugeloberfläche und den Durchmesser hätten nehmen können — zum einen, weil  $U \cap V$  dann nicht wegzusammenhängend gewesen wäre, und zum anderen, weil  $U$  und  $V$  dann nicht offen in  $X$  gewesen wären.

- (b) Wir betrachten für  $K$  nun die beiden unverschlungenen Kreislinien wie in Beispiel 9.20 (a). Wählen wir dann für  $U$  und  $V$  den Schnitt von  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  mit zwei Halbräumen wie im Bild rechts, so sind  $U$  und  $V$  homotopieäquivalent zum Komplement einer einfachen Kreislinie wie in (a) und haben damit Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z}$ . Der Schnitt  $U \cap V$  dagegen ist einfach zusammenhängend. Damit ergibt sich nach Satz 9.8



$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

- (c) Es sei nun  $K$  die Vereinigung der beiden verschlungenen Kreislinien aus Beispiel 9.20 (b). Zur Berechnung der Fundamentalgruppe von  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  verformen wir die beiden Kreislinien zunächst so wie im folgenden Bild links dargestellt.



Das rechte Bild zeigt dann einen Deformationsretrakt  $X$  von  $\mathbb{R}^3 \setminus K$ ; er besteht aus einer Sphäre  $S^2$ , an die von innen ein Torus  $S^1 \times S^1$  geklebt ist, der die helle Kreislinie von  $K$  in seinem Inneren enthält. Diese Deformationsretraktion von  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  nach  $X$

- drückt die Punkte im Inneren des Torus von innen an die Toruswand;
- verhält sich auf den Punkten innerhalb von  $S^2$  und außerhalb von  $S^1 \times S^1$  analog zur Deformationsretraktion aus (a) und schiebt die Punkte von innen gegen die Sphäre oder von außen gegen den Torus; und
- ist außerhalb der Sphäre einfach die radiale Projektion von außen nach  $S^2$ .

Nach Satz 7.14 (b) ist also wieder  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(X)$ . Um die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$  zu berechnen, zerlegen wir  $X$  nun in eine offene Umgebung  $U$  von  $S^2$  in  $X$  und eine offene Umgebung  $V$  von  $S^1 \times S^1$  in  $X$ . Dann ist  $S^2$  bzw.  $S^1 \times S^1$  ein Deformationsretrakt von  $U$  bzw.  $V$ , und  $U \cap V$  ist einfach zusammenhängend. Mit dem Satz 9.8 von Seifert und van Kampen erhalten wir also aufgrund von Beispiel 8.16 (b) und 9.10

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \{1\} * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Da die Fundamentalgruppen von  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  in den Fällen (b) und (c) verschieden sind, haben wir mit Bemerkung 9.21 also insbesondere bewiesen, dass die beiden unverschlungenen und verschlungenen Kreislinien aus Beispiel 9.20 keine äquivalenten Knoten sind, also nicht in  $\mathbb{R}^3$  ineinander deformiert werden können.