

## Lineare Algebra I

Abgabetermin: Montag, 10/11/2003, 14:00 Uhr

**Aufgabe 5:** Finde eine Menge  $M$  und zwei Abbildungen  $f, g : M \rightarrow M$ , so daß gilt:

- $f$  ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- $g$  ist injektiv, aber nicht surjektiv.

**Aufgabe 6:** Seien  $M, N$  zwei nicht-leere Mengen,  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Beweise die folgenden beiden Aussagen:

- $f$  ist genau dann surjektiv, wenn für *alle* nicht-leeren Mengen  $X$  und für *alle* Abbildungen  $g : N \rightarrow X$  und  $h : N \rightarrow X$  aus  $g \circ f = h \circ f$  folgt:  
 $g = h$ .
- $f$  ist genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\forall X \neq \emptyset, \forall g : X \rightarrow M, \forall h : X \rightarrow M : (f \circ g) = (f \circ h) \implies g = h.$$

**Aufgabe 7:** Zeige durch vollständige Induktion, daß für jede natürliche Zahl  $n > 0$  die Summe  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$  der ersten  $n$  ungeraden Zahlen  $n^2$  ergibt.

**Aufgabe 8:** Es sei  $M$  eine Menge,  $\mathcal{P}(M)$  die Potenzmenge von  $M$ . Zeige, daß es keine surjektive Abbildung  $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$  gibt.

Hinweis: Man nehme an, daß es eine Surjektion  $f$  gibt und betrachte die Menge  $\{m \in M \mid m \notin f(m)\}$ , d. h. die Menge der Elemente von  $M$ , die nicht in ihrem Bild enthalten sind.