FB Mathematik WS 2003/04, Blatt 4

Prof. Dr. Gert–Martin Greuel Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra I

Abgabetermin: Montag, 24/11/2003, 13:00 Uhr

Bitte beachtet den geänderten Abgabetermin!!!

Aufgabe 13: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Für $g, h \in G$ definiere

$$g \sim h \quad :\Longleftrightarrow \quad h \in \left\{g, g^{-1}\right\}.$$

Zeige, $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf G und für $g \in G$ ist $[g] = \{g, g^{-1}\}$ die Äquivalenzklasse von g.

Hinweis, wer diese Schreibweise einer "Relation" nicht mag, der beachte, daß die Relation auch geschrieben werden kann als $R := \left\{(g,h) \in G \times G \mid h = g \text{ oder } h = g^{-1}\right\}$.

Aufgabe 14: Ist die Menge $G := \big(\mathbb{Q} \setminus \{0\}\big) \times \big(\mathbb{Q} \setminus \{0\}\big)$ zusammen mit der durch $(a, b) \cdot (a', b') := (ab', ba')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definierten Verknüpfung eine Gruppe? Beweise Deine Antwort!

Aufgabe 15: Ist die Menge $G := \mathbb{N} \cup \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; 0 \neq n \in \mathbb{N}\right\}$ bezüglich der Multiplikation rationaler Zahlen eine Gruppe? Beweise Deine Antwort!

Aufgabe 16: Zeige, ist G eine endliche Gruppe und enthält G eine gerade Zahl an Elementen, so gibt es mindestens ein $e \neq g \in G$ mit $g^2 = e$.

Hinweis, verwende die Zerlegung von G in Äquivalenzklassen mittels der Äquivalenzrelation aus Aufgabe 13. – e bezeichnet das neutrale Element von G.