FB Mathematik | WS 2003/04, Blatt 5
Prof. Dr. Gert–Martin Greuel | Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra I

Abgabetermin: Montag, 01/12/2003, 13:00 Uhr

Aufgabe 17: [Satz von Lagrange]
Es sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Wir definieren auf G eine Relation $\sim_U$ durch

$$g \sim_U h \;:\Leftrightarrow\; g^{-1}\cdot h \in U$$

für $g, h \in G$. Beweist **zwei** der folgenden Aussagen:

a. $\sim_U$ ist eine Äquivalenzrelation.

b. Für $g \in G$ ist $[g] = g \cdot U := \{g \cdot u \mid u \in U\}$ Äquivalenzklasse von g.

c. Für jedes $g \in G$ gilt: $|U| = |g \cdot U|$.

d. Ist G endlich und ist m die Anzahl paarweise verschiedener Äquivalenzklassen von $\sim_U$ auf G, so gilt:

$$|G| = |U| \cdot m.$$

Hinweise: Für eine endliche Menge M bezeichnet $|M|$ die Mächtigkeit von M, d.h. die Anzahl an Elementen in M. In c. gebe man konkret eine Bijektion zwischen den beiden Mengen an.

Aufgabe 18: $\big(\mathbb{S}(\mathbb{R}),\circ\big)$ bezeichne die in der Vorlesung eingeführte Gruppe der bijektiven Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, wobei $\circ$ die Verkettung von Abbildungen bezeichnet. Ist

$$U = \big\{ f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}) \;\big|\; |f(x)| = |x| \;\forall\, x \in \mathbb{R} \big\}$$

eine Untergruppe von $\mathbb{S}(\mathbb{R})$? Beweise Deine Antwort!
Anmerkung: In der Definition von U bezeichnet $|y|$ den Absolutbetrag der reellen Zahl y.

Aufgabe 19: Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\alpha : (\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Z},+)$.

Aufgabe 20: Schreibe eine SINGULAR-Prozedur `zeilenvielfaches`, die eine Matrix M (Typ `matrix`), eine Zahl z (Typ `poly`) sowie eine ganze Zahl k (Typ `int`) einliest, die k-te Zeile der Matrix M mit z multipliziert und das Ergebnis zurück gibt.

Hinweis: Schaut Euch in der “Kurzeinführung in Singular” das Beispiel `permcol` in Abschnitt 1.7. Außerdem kann man sich mittels des Befehls `help matrix;` die Online-Hilfe von Singular zum Typ `matrix` anzeigen lassen. Beachtet, daß Ihr die Prozedur nur testen könnt, wenn Ihr in Singular mittels `ring r=0,x,lp;` einen Ring definiert habt!