

## Lineare Algebra I

Abgabetermin: Montag, 08/12/2003, 13:00 Uhr

**Aufgabe 21:**  $(G, \cdot)$  sei eine Gruppe, und die Abbildung  $\alpha : G \rightarrow G$  sei definiert durch  $\alpha(g) = g^{-1}$  für  $g \in G$ . Zeige, genau dann ist  $\alpha$  ein Gruppenhomomorphismus, wenn  $G$  abelsch ist.

**Aufgabe 22: [Zyklenerlegung einer Permutation]**

Sei  $0 \neq n \in \mathbb{N}$  und  $(\mathbb{S}_n, \circ)$  die Symmetrische Gruppe auf  $n$  Elementen. Eine Permutation  $\pi \in \mathbb{S}_n$  für die es eine disjunkte Zerlegung  $\{1, \dots, n\} = \{a_1, \dots, a_k\} \cup \{b_1, \dots, b_{n-k}\}$  gibt, so daß gilt:

$$(i) \quad \pi(a_i) = \begin{cases} a_{i+1}, & \text{für } i = 1, \dots, k-1, \\ a_1, & \text{für } i = k, \end{cases}$$

$$(ii) \quad \pi(b_i) = b_i \text{ für } i = 1, \dots, n-k,$$

heißt ein  $k$ -Zyklus. Beachte, die Bedingungen (i) und (ii) bedeuten, daß  $\pi$  die folgende Gestalt hat:

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & b_1 & \cdots & b_{n-k} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_1 & b_1 & \cdots & b_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben statt dessen kurz:<sup>1</sup>

$$\pi = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_k).$$

Sei nun  $\pi \in \mathbb{S}_n$  eine beliebige Permutation. Beweise **zwei** der folgenden Aussagen a.-c.:

a. Für  $a, b \in \{1, \dots, n\}$  definieren wir

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists \nu \in \mathbb{Z} : a = \pi^\nu(b).$$

$\sim$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $\{1, \dots, n\}$ .

b. Für  $a \in \{1, \dots, n\}$  bezeichne  $[a]$  die Äquivalenzklasse von  $a$  bez.  $\sim$ .  
Dann gilt:

$$\exists k \in \mathbb{N} : [a] = \{a, \pi(a), \dots, \pi^{k-1}(a)\}.$$

---

<sup>1</sup>Beachte: Die Zyklen  $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_k)$ ,  $(a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_k \ a_1)$ , etc. sind gleich. Die 2-Zykel sind genau die *Transpositionen*.

c. Es gibt eine disjunkte Zerlegung  $\{1, \dots, n\} = \bigcup_{i=1}^t \{a_{i1}, \dots, a_{ik_i}\}$ , so daß

$$\pi = (a_{11} \cdots a_{1k_1}) \circ \dots \circ (a_{t1} \cdots a_{tk_t}).$$

(Wir nennen diese Darstellung die *Zyklenzerlegung* von  $\pi$ .)

Hinweis: Die Teile a. bis c. bauen jeweils aufeinander auf. Wer Teil b. sauber beweisen möchte, denke über die folgenden Aussagen nach: (i)  $\exists k_0 \geq 0$  minimal mit  $\pi^{k_0}(a) = a$ ; (ii) für alle  $\lambda \in \mathbb{Z}$  gilt  $\pi^{\lambda k_0}(a) = a$ ; und (iii) für die ganzen Zahlen ist Division mit Rest möglich. Der Teil a. ist wirklich leicht!

**Aufgabe 23:** Es seien  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_5$  gegeben. Berechne die folgenden Permutationen und gib ihre Zyklenzerlegung gemäß Aufgabe 22 sowie eine Zerlegung in Transpositionen (= 2-Zykel) (gemäß Vorlesung) an:

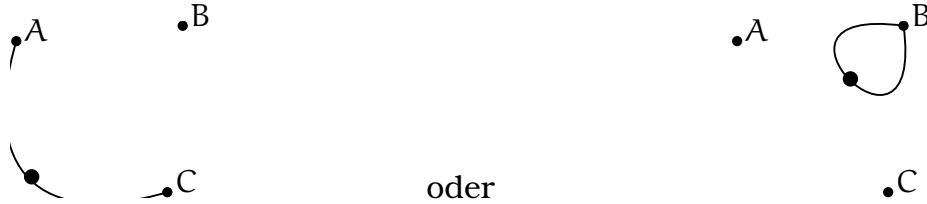
$$\pi \circ \sigma, \quad \sigma \circ \pi, \quad \pi^{-1}, \quad \sigma^{-1}.$$

**Aufgabe 24:** Es sei  $K = \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ . Zeige,  $K$  ist ein Teilkörper des Körpers  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen.

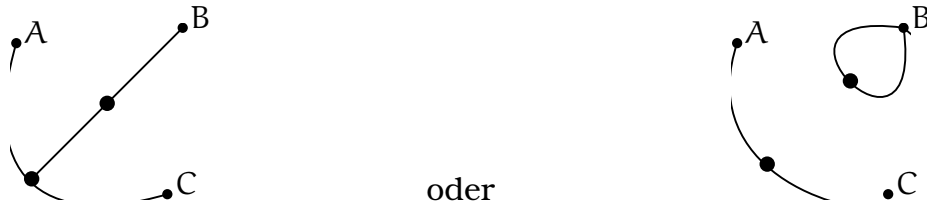
## Sprößling-Spiel

Spielverlauf:

- 1) Zeichne  $n$  Punkte auf ein Stück Papier (z. B.  $n = 3$ ).
- 2) Der erste Spieler verbindet zwei Punkte miteinander oder alternativ einen Punkt mit sich selbst. Dann zeichnet er auf die Verbindungskurve einen neuen Punkt. Z. B.:



- 3) Der zweite Spieler verbindet ebenfalls zwei Punkte miteinander oder einen Punkt mit sich selbst und zeichnet dann auf die Verbindungskurve einen neuen Punkt. Z. B.:

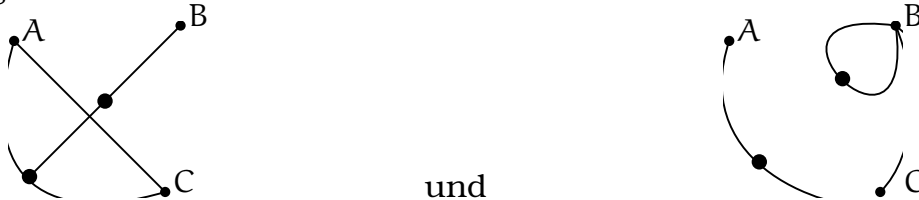


- 4) Und so weiter ...

Dabei gelten folgende Regeln:

- a. Die Verbindungskurven dürfen weder sich selbst noch eine andere Kurve schneiden.
- b. Von keinem Punkt dürfen mehr als drei Kurven ausgehen.

Die folgenden Situationen sind also nicht erlaubt:



### Probleme:

- a. Zeige, daß jedes Spiel mindestens  $2n$  und höchstens  $3n - 1$  Züge dauert.
- b. Gibt es eine Strategie, so daß der erste (bzw. zweite) Spieler immer gewinnt ( $n = 3, 4, 5$ )?

**Lösungen zum Problem des Monats bitte an Herrn Greuel geben!**