Lineare Algebra I

Abgabetermin: Montag, 15/12/2003, 13:00 Uhr

Beachte: Der Abgabetermin für die Singular-Aufgabe wird auf Mittwoch, den 17.12.2003, um 12:00 Uhr, festgesetzt. Dadurch soll die Möglichkeit gegeben werden, sowohl am 9.12. als auch am 16.12. in der Singular–Fragestunde von Yaw Adjei in Raum 48-419 Hilfe bei Problemen zu erhalten, die beim Programmieren auftreten.

Aufgabe 25: Bestimme alle bijektiven Ringhomomorphismen[1] $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, für die gilt, daß $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 26:

a. Seien $z = 3 + 4i, z' = 5 - 3i \in \mathbb{C}$. Bestimme die folgenden Zahlen:
$$z \cdot z',\ \frac{1}{z},\ |z|,\ z \cdot \overline{z}.$$

b. Es seien $x = [97], y = [42] \in \mathbb{Z}_{131}$ gegeben. Berechne die folgenden Elemente im Körper $\mathbb{Z}_{131}$:
$$x + y,\ x * y,\ \frac{1}{x}.$$

Aufgabe 27: Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$. Eine Zahl $g \in \mathbb{Z}$ heißt ein ggT (*größter gemeinsamer Teiler*) von $a_1, \ldots, a_n$, falls gilt:

(i) $g | a_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(ii) Für alle $h \in \mathbb{Z}$ mit $h | a_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt: $h | g$.

a. Es sei $h \in \mathbb{Z}$ ein ggT von $a_1, \ldots, a_{n-1}$, $n \geq 3$, und $g \in \mathbb{Z}$. Zeige, g ist genau dann ein ggT von $a_1, \ldots, a_n$, wenn g ein ggT von h und a_n ist.

b. Zeige, $g \in \mathbb{Z}$ ist genau dann ein ggT von $a_1, \ldots, a_n$, wenn
$$g\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + \cdots + a_n\mathbb{Z} := \{a_1x_1 + \cdots a_nx_n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}\}.$$

c. Genau dann besitzt die *diophantische Gleichung* $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ (mit $b \in \mathbb{Z}$) eine Lösung $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, wenn jeder ggT von $a_1, \ldots, a_n$ die Zahl b teilt.

Aufgabe 28: Schreibe eine SINGULAR–Prozedur `zeilentausch`, die eine Matrix M (Typ `matrix`) sowie zwei ganze Zahlen k und l (Typ `int`) einliest, die k-te und l-te Zeile der Matrix vertauscht und die veränderte Matrix zurück gibt.

[1] Man nennt einen bijektiven Ringhomomorphismus $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auch einen *Körperautomorphismus*.