FB Mathematik — WS 2003/04, Blatt 10

Prof. Dr. Gert–Martin Greuel — Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra I

Abgabetermin: Montag, 19/01/2004, 13:00 Uhr

Beachte: Der Abgabetermin für die Singular-Aufgabe wird auf Mittwoch, den 21.01.2004, um 12:00 Uhr, festgesetzt. Am 12.01. von 19-21:00 Uhr, am 13.01. von 17:30-19:00 Uhr und am 15.01. von 19:00-21:00 Uhr gibt es Zusatzübungen zu Singular in Raum 48-419, in denen Teile der Prozedur ZSF aus Aufgabe 40 gemeinsam erarbeitet werden!

Aufgabe 37: Es sei $B := \big((3,5,2)^t, (1,1,-1)^t, (2,4,1)^t\big)$.

a. Zeige, B ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

b. Ersetze *mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz* zwei Vektoren in B durch die Vektoren $(1,3,2)^t$ und $(1,-1,-4)^t$.

Aufgabe 38: Es seien V und W K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = \dim_K(W) < \infty$, $U \subseteq V$ ein Unterraum von V und $f : V \to W$ K-linear. Zeige:

a. Genau dann gilt $U = V$, wenn $\dim_K(U) = \dim_K(V)$.

b. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

   (a) f ist ein Isomorphismus,

   (b) f ist ein Monomorphismus,

   (c) f ist ein Epimorphismus.

Hinweis: Teil a. ist ein Zweizeiler und in Teil b. kann eine Übungsaufgabe gewinnbringend eingesetzt werden.

Aufgabe 39: Finde einen (notwendigerweise nicht endlich dimensionalen) Vektorraum V und eine lineare Abbildung $f : V \to V$ die injektiv, aber nicht surjektiv ist. (Beweis gefordert!)

Aufgabe 40: Schreibt eine SINGULAR–Prozedur `ZSF`, die eine Matrix A (Typ `matrix`) einliest und eine Zeilenstufenform von A zurückgibt. Wer etwas mehr Programmiererfahrung besitzt, sollte noch eine zweite Prozedur `RZSF` schreiben, die ebenfalls eine Matrix A einliest, aber die *reduzierte* Zeilenstufenform berechnet – dabei sollte dann sinnvollerweise die Prozedur `ZSF` verwendet werden.

Ich empfehle, den folgenden *rekursiven* Algorithmus für die Prozedur ZSF zu verwenden:

INPUT: $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$.
OUTPUT: $\mathrm{ZSF}(A)$, die Zeilen-Stufen-Form von A.

1. Schritt Falls $m = 1$, gehe zu Schritt 8.

2. Schritt Durchlaufe die erste Spalte von oben nach unten, bis ein Element a_{i1} ungleich Null gefunden wurde oder das Ende der Spalte erreicht ist.

3. Schritt Wurde kein $a_{i1} \neq 0$ gefunden, gehe zu Schritt 6. Andernfalls, vertausche die erste Zeile mit der i-ten.

4. Schritt Für $k = 2, \ldots, m$ addiere das $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile zur k-ten.

5. Schritt Falls $n = 1$, gehe zu Schritt 8. Andernfalls bilde eine Untermatrix B von A, durch Streichen der ersten Zeile und der ersten Spalte von A und gehe dann zu Schritt 7.

6. Schritt Bilde eine Untermatrix B von A durch Streichen der ersten Spalte von A und gehe zu Schritt 7.

7. Schritt Wende den Algorithmus auf die Untermatrix B an.[1]

8. Schritt Gib die (veränderte) Matrix A zurück.

Beachtet: Die Prozeduren `zeilenvielfaches`, und `zeilentausch`, die Ihr bereits geschrieben habt, solltet Ihr dabei verwenden. Die Prozedur `zeilenaddition` aus der Klausur ist nicht “allgemein” genug. Ersetzt sie durch die Prozedur `zeilenaddition` von der Webseite der Linearen Algebra, die es erlaubt, auch Vielfache einer Zeile zu einer anderen zu addieren, oder ändert Eure Prozedur ab. Falls Ihr nicht sicher seid, ob Eure eigenen Prozeduren funktionieren, könnt Ihr die Musterlösungen von der Webseite der Linearen Algebra herunterladen.

[1] Dies ist der Rekursionsschritt, indem der Algorithmus mit einer kleineren Untermatrix aufgerufen wird. Das Ergebnis, das man dabei zurück erhält, wird wieder in die Matrix A eingefügt.