Lineare Algebra I

Abgabetermin: Montag, 26/01/2004, 13:00 Uhr

Aufgabe 41: Es seien $A \in \text{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \text{Mat}(n \times p, K)$ zwei Matrizen über dem Körper K. Zeige, $\text{rang}(A \cdot B) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$.
Hinweis: Beachtet, $\text{rang}(A) = \dim_K\big(\text{Im}(f_A)\big)$.

Aufgabe 42: Es sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, U und U' die beiden in Aufgabe 30 untersuchten Unterräume. Zeige, $V = U \oplus U'$, d. h. V ist die *innere* direkte Summe aus U und U'.

Aufgabe 43: Es sei K ein Körper. $U := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 = \ldots = a_n \in K\}$ und $U' := \big\{(a_1, \ldots, a_n) \bigm| a_i \in K, \sum_{i=1}^n a_i = 0\big\}$ sind Unteräume des K^n. Bestimme $\dim_K(U)$, $\dim_K(U')$, $\dim_K(U \cap U')$ und $\dim_K(U + U')$.

Aufgabe 44: Es seien $U, U' \subseteq V$ Unterräume des K-Vektorraumes V. Zeige **eine** der folgenden Aussagen:

a. $(U + U')/U \cong U'/(U \cap U')$,

b. Falls $U' \subseteq U$, dann gilt $(V/U')/(U/U') \cong V/U$.