FB Mathematik WS 2003/04, Blatt 14

Prof. Dr. Gert–Martin Greuel Dr. Thomas Keilen

Lineare Algebra I

Abgabetermin: Montag, 16/02/2004, 13:00 Uhr

Aufgabe 53: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Zeige, die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

a. $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$,

b. $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.

Aufgabe 54: Es sei K ein Körper. Wir definieren die *Spur* einer quadratischen Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ als Summe der Diagonalelemente von A, d. h.

$$\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Zeige die folgenden Aussagen:

a. $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$.

b. $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B^{-1}AB)$ für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Gl}_n(K)$.

c. Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung, dann gilt für je zwei Basen E und F von V

$$\mathrm{Spur}\left(M_E^E(f)\right) = \mathrm{Spur}\left(M_F^F(f)\right).$$

Insbesondere macht die Definition $\mathrm{Spur}(f) := \mathrm{Spur}\left(M_E^E(f)\right)$ Sinn, sprich, sie ist unabhängig von der Wahl der Basis E.

d. Gibt es in c. ein $r \in \mathbb{N}$ mit $f^r = 0$, so gilt $\mathrm{Spur}(f) = 0$.

e. Gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $A^r = 0$, so gilt $\mathrm{Spur}(A) = 0$.

Hinweis zum Beweis von d.: Führe Induktion über $n = \dim_K(V)$. Zeige, zunächst $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ und wende Induktion auf $f_{V/\mathrm{Ker}(f)}$ an – verwendet das Ergebnis von Aufgabe 51 c.

Aufgabe 55: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $a \in R$. Bestimme die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, R).$$