

Mathematik für Informatiker II

Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**. Begründen Sie Ihre Lösungen!

Aufgabe 1: Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \geq 1$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

Aufgabe 2: Sei $a_0 = 13$ und für jedes $n \geq 0$ sei $a_{n+1} := \sqrt{2a_n - 1}$. Beweisen Sie, daß dadurch eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiert wird, daß diese Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 3: Beweisen Sie mit dem Integralkriterium die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^2}.$$

Aufgabe 4: Beweisen Sie die folgende Version der Regel von de l'Hospital:

Seien $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, für die $f(0) = 0, g(0) = 0$ und $g'(0) \neq 0$ gilt. Beweisen Sie, daß dann für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ existiert und gleich $\frac{f'(0)}{g'(0)}$ ist.

Aufgabe 5: Sei $a \neq 0$ eine reelle Zahl und die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \frac{a}{2} \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) + \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \right).$$

Beweisen Sie, daß $(f')^2 + 1 = (af'')^2$ gilt.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie alle Punkte $x \in [-4, -2] \subset \mathbb{R}$, an denen die Funktion $f : [-4, -2] \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $f(x) := (x+3)^2(x-2)^3$ gegeben ist, einen lokalen oder globalen Extremwert hat. Geben Sie (mit Begründung) zu jedem dieser Punkte an, um welche Art (Minimum/Maximum) von Extrempunkt es sich handelt.

Aufgabe 7: Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} t \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$.

Aufgabe 8: Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} f''(x) + f'(x) - 2f(x) &= 0 \\ f(0) &= 3 \\ f'(0) &= 0. \end{aligned}$$