

### Mathematik für Informatiker I

Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**. Begründen Sie Ihre Lösungen!

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus eine Parameterdarstellung für  $\text{Lös}(A, b) \subset \mathbb{Q}^4$ . Geben Sie konkrete Vektoren  $u, v_i \in \mathbb{Q}^4$  an, für die  $\text{Lös}(A, b) = \{u + \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Q}\}$  gilt.

Benutzen Sie  $b = (1, 1, 11) \in \mathbb{Q}^3$  und  $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & -13 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 9 & 11 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3 \times 4, \mathbb{Q})$ .

**Aufgabe 2:** Ist die Familie, die aus den Vektoren  $(1, 10, 6, 9), (6, 11, 7, 2), (7, 6, 2, 11)$  besteht, eine Basis von  $V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \sum_{i=1}^4 x_i = 0\} \subset \mathbb{F}_{13}^4$ , als Vektorraum über  $\mathbb{F}_{13}$ ? Hier und im Folgenden schreiben wir abkürzend für die Restklasse  $[a]$  einfach  $a$ , wenn  $a$  eine ganze Zahl ist.

**Aufgabe 3:** Durch  $f(x_1, x_2) := (-2x_1 + x_2, 7x_1 - 3x_2, x_1)$  wird eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert. Berechnen Sie für diese Abbildung die Matrix  $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{A}}(f)$ . Hierbei ist  $\mathbb{A} = (a_1, a_2)$  die Basis von  $\mathbb{R}^2$  die durch die Vektoren  $a_1 = (1, 2), a_2 = (2, 5)$  gebildet wird. Die Basis  $\mathbb{B} = (b_1, b_2, b_3)$  von  $\mathbb{R}^3$  besteht aus den Vektoren  $b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (2, 1, 2), b_3 = (0, -1, 4)$ .

**Aufgabe 4:** Bestimmen Sie alle reellen Zahlen  $\lambda$ , für die die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & \lambda + 1 \\ 3 & 8 & 2\lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

invertierbar ist und berechnen Sie für all diese Werte von  $\lambda$  die Inverse  $B^{-1}$ .

**Aufgabe 5:** Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler  $d$  der Zahlen 1234 und 357 und finden Sie ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$ , für die  $d = a \cdot 1234 + b \cdot 357$  gilt.

**Aufgabe 6:** Berechnen Sie (mit einem nachvollziehbaren Rechenweg, der sich an den in der Vorlesung erläuterten Verfahren orientiert) die kleinste positive ganze Zahl  $x$ , für welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{7} \\ x &\equiv 5 \pmod{8} \\ 5 \cdot x &\equiv 4 \pmod{13} \end{aligned}$$

gelten. (Ausprobieren und Raten wird nicht als Lösung anerkannt.)

**Aufgabe 7:** Sei  $K$  ein Körper und  $U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid r \in K \right\} \subset \text{Mat}(2 \times 2, K)$ . Beweisen Sie, daß  $U$  eine Untergruppe von  $\text{GL}(2, K)$  ist.

**Aufgabe 8:** Beweisen Sie, daß durch

$$x \sim y \iff \text{es gibt ein } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 3^n \cdot y$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $\mathbb{Z}$  definiert ist.