

Übungen zur Mathematik für Informatiker I

Abgabe am Freitag, dem 15. Februar 2002, bis 11.00 Uhr.

Für Aufgabe 1 und 2:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ die durch die Matrix A gegebene lineare Abbildung. Die Basis $\mathbb{A} = (a_1, a_2, a_3)$ von \mathbb{R}^3 werde durch die Vektoren $a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (0, 2, -1)$, $a_3 = (-1, 1, 0)$ gebildet. Für \mathbb{R}^4 sei die Basis $\mathbb{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ mit $b_1 = (1, 1, 0, 0)$, $b_2 = (1, 1, 1, 0)$, $b_3 = (0, 1, 1, 1)$, $b_4 = (0, 0, 1, 1)$ gegeben. Berechnen Sie die Matrix $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{A}}(f)$ für f bezüglich dieser Basen.

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ wie in Aufgabe 1 und $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche durch die Matrix B gegeben ist.

- (a) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f))$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\text{im}(f))$.
- (b) Berechnen Sie die Matrix (bezüglich der Standardbasen), welche die lineare Abbildung $g \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert.

Aufgabe 3: Sei $\mathbb{T} \subset \text{GL}(n, K)$ die Teilmenge aller invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen, das sind diejenigen $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{GL}(n, K)$, für die aus $i > j$ stets $a_{ij} = 0$ folgt. Beweisen Sie, daß $\mathbb{T} \subset \text{GL}(n, K)$ eine Untergruppe ist.

Aufgabe 4: Für die Faschingsfeier soll ein leicht alkoholhaltiges Mischgetränk hergestellt werden. Findige Studenten haben bei einem Großhändler extrem preisgünstige Angebote für drei verschiedene No-Name-Produkte ausfindig gemacht. Obwohl die Namen der Getränke nicht bekannt sind, ist durch eine Analyse die Zusammensetzung der Getränke ermittelt worden. Der Prozentuale Anteil von Alkohol, Wasser und Sonstiger Bestandteile ist in folgende Tabelle angegeben:

	Alkohol	Wasser	Sonstiges
Getränk 1	20	20	60
Getränk 2	20	70	10
Getränk 3	0	50	50

Ist es möglich, daraus ein Getränk (wie auch immer es dann schmecken mag) zu mischen, in dem 10% Alkohol und 40% Wasser enthalten sind? Falls ja, bestimmen Sie die Menge jeder Getränkesorte, die man benötigt, um 100 Liter dieser Mischung herzustellen.

(*) Sei p eine Primzahl und $r \geq 0$ eine ganze Zahl. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente des \mathbb{F}_p -Vektorraumes $(\mathbb{F}_p)^r$. Nutzen Sie dieses Ergebnis um zu beweisen, daß es für jeden *endlichen* Körper eine Primzahl p und eine ganze Zahl $r \geq 1$ gibt, so daß dieser Körper genau p^r Elemente enthält. Geben Sie einen Körper mit 4 Elementen an (das ist der Fall $p = 2$ und $r = 2$).

Das Lösen der mit (*) gekennzeichneten Aufgabe ist freiwillig.