

## Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 11.11.2002, 18:00 Uhr

### Aufgabe 1: (Rechnerarithmetik)

Seien  $L \geq 1$ ,  $E \geq 1$  ganze Zahlen,  $B \geq 2$  eine gerade ganze Zahl, und sei

$$\mathbb{A} := \left\{ \pm \left( \sum_{i=1}^L d_i \cdot B^{-i} \right) \cdot B^e \mid \begin{array}{l} d_i \in \{0, 1, \dots, B-1\}, d_1 \neq 0, \\ e \in [-E, E] \cap \mathbb{Z} \end{array} \right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$

die Menge der Maschinenzahlen. Die Zahlen  $d_1, \dots, d_L$  heißen die *Mantissen*ziffern,  $d_1 d_2 \dots d_L$  die *Mantisse*,  $B$  die *Basis* und  $e$  der *Exponent* der Maschinenzahl

$$\pm \left( \sum_{i=1}^L d_i \cdot B^{-i} \right) \cdot B^e =: \pm 0.d_1 d_2 \dots d_L \cdot B^e.$$

Bekanntermaßen läßt sich jede reelle Zahl  $x \neq 0$  in der Basis  $B$  darstellen als unendliche Summe

$$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot B^{-i} \right) \cdot B^e = \operatorname{sgn}(x) \cdot (0.d_1 d_2 d_3 \dots d_L d_{L+1} d_{L+2} \dots) \cdot B^e$$

mit  $d_i \in \{0, 1, \dots, B-1\}$ ,  $d_1 \neq 0$ ,  $e \in \mathbb{Z}$ . Definiere nun die Rundungsfunktion vermöge

$$\operatorname{rd}(x) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \cdot (0.d_1 d_2 d_3 \dots d_L) \cdot B^e & \text{falls } d_{L+1} < \frac{B}{2}, \\ \operatorname{sgn}(x) \cdot (0.d_1 d_2 d_3 \dots d_L + B^{-L}) \cdot B^e & \text{falls } d_{L+1} \geq \frac{B}{2}. \end{cases}$$

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  für die Rundungsfunktion  $\operatorname{rd}$  (so dass die Werte  $\operatorname{rd}(x)$  jeweils Maschinenzahlen sind).
- Bestimmen Sie die Maschinengenauigkeit  $\operatorname{eps}$ .
- Zeigen Sie dass für alle  $x \in \mathbb{D}$  gilt

$$\frac{|x - \operatorname{rd}(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2} \cdot B^{1-L}.$$

- Seien  $x \in \mathbb{D}$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  gegeben mit  $\operatorname{rd}(x) = x \cdot (1 + \varepsilon)$ . Zeigen Sie, dass gilt

$$|\varepsilon| \leq \frac{1}{2} \cdot B^{1-L}.$$

- Zeigen Sie, dass das Assoziativ-Gesetz der Addition in der Rechnerarithmetik  $((x, y) \mapsto \operatorname{rd}(x + y))$  im Allgemeinen *nicht* gilt.

HINWEIS ZU (e): Es genügt, ein konkretes Beispiel anzugeben.

**Aufgabe 2:** Zur Berechnung des Ausdrucks  $f(\sqrt{2}) := (\sqrt{2} - 1)^6$  möchte man den Näherungswert 1.4 für  $\sqrt{2}$  benutzen. Welche der folgenden Formeln führt wohl zu dem besten Resultat:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad (\sqrt{2} - 1)^6, & \text{(b)} \quad \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^6}, & \text{(c)} \quad (3 - 2\sqrt{2})^3, \\ \text{(d)} \quad \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^3}, & \text{(e)} \quad 99 - 70\sqrt{2}, & \text{(f)} \quad \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}}? \end{array}$$

Begründen Sie Ihre Antwort ohne die einzelnen Werte zu berechnen! Benutzen Sie dazu  $1.4 < \sqrt{2} < 1.42$ .

**Aufgabe 3:** Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto x - \sin(x), & x \longmapsto \log(x + \sqrt{x^2 + 1}). \end{array}$$

Beantworten Sie folgende Fragen jeweils für beide Funktionen  $f, g$ .

- Für welche  $x$ -Werte tritt das Auslöschungsphänomen auf? (Erwartet wird eine ungefähre Angabe des kritischen Bereiches.)
- Wie kann man den Auslöschungseffekt vermeiden?

HINWEIS ZU (b): Bei Betrachtung von  $g$  sollte man die vorhandene Symmetrie des Graphen beachten.

**Aufgabe 4:** Bei ruhiger See (d.h. bei kugelförmiger Wasseroberfläche) blicken wir durch ein Fernrohr ( $9.00 \pm 0.05$  m über dem Wasserspiegel) an Deck eines Schiffes, welches sich bei klarer Nacht dem Leuchtturm "Roter Sand" vor Bremerhaven nähert. Der Scheinwerfer dieses Leuchtturms befindet sich  $27.00 \pm 0.1$  m über dem Wasserspiegel; der Erdradius ist uns bekannt mit  $6370 \pm 35$  km.



[www.roter-sand.de](http://www.roter-sand.de)

- Wie weit sind wir von "Roter Sand" entfernt, wenn wir den Scheinwerfer gerade aus dem Meer auftauchen sehen?
- Ist die Berechnung der Entfernung (absolut bzw. relativ) gut konditioniert?