FB Mathematik
HD Dr. C. Lossen
Dr. M. Schulze

WS 2002/03, Blatt 2

Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 18.11.2002, 18:00 Uhr

Aufgabe 5: (*Induzierte Normen*)

Seien $\|\ \|_m$, bzw. $\|\ \|_n$, (Vektor-) Normen auf $\mathbb{K}^m$, bzw. $\mathbb{K}^n$ (wie üblich $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) für alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_m}{\|\boldsymbol{x}\|_n} = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_n=1} \|A\boldsymbol{x}\|_m \,.$$

(b) Die Abbildung

$$|||\ ||| : \mathbb{K}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}\,, \quad A \longmapsto \max_{\|\boldsymbol{x}\|_n=1} \|A\boldsymbol{x}\|_m\,,$$

definiert eine (Matrix-) Norm auf $\mathbb{K}^{m\times n}$, die *von* $\|\ \|_m$, $\|\ \|_n$ *induzierte Norm.*

(c) Seien $\|\ \|_m$, $\|\ \|_n$ die Betragssummennorm $\|\ \|_1$ auf $\mathbb{K}^m$, bzw. $\mathbb{K}^n$, dann ist $|||\ |||$ die Spaltensummennorm $\|\ \|_1$ auf $\mathbb{K}^{m\times n}$.

(d) Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n\times k}$, dann gilt:

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \cdot \|B\|_1\,.$$

Im Folgenden sei $m = n$ und $\|\ \|_m = \|\ \|_n$. Zeigen Sie:

(e) die $n \times n$ Einheitsmatrix $E = E_n$ erfüllt $|||E||| = 1$.

(f) Die Betragssummen(vektor)norm auf $\mathbb{K}^{n^2}$ $\left(\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ ist eine *submultiplikative* (Matrix-) Norm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$, aber für $n \geq 2$ wird sie *nicht* von einer (Vektor-) Norm auf $\mathbb{K}^n$ *induziert.*

Aufgabe 6: (*Abschätzungen zu Spektralradius und Spektralnorm*)

Zeigen Sie:

(a) mit einem einfachen Gegenbeispiel, daß der Spektralradius ρ keine (Matrix-) Norm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$, $n \geq 2$, definiert.

(b) Für jede submultiplikative Norm $\|\ \|$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ gilt $\rho(A) \leq \|A\|$.

(c) Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, dann gilt

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty}\,.$$

HINWEIS ZU (c): Schreiben Sie $\|A\|_2^2 = \|\overline{A}^T A\boldsymbol{x}\|_1$ für ein geeignetes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$, und nutzen Sie die Gleichheit $\|\overline{A}^T\|_1 = \|A\|_\infty$.

Rückseite beachten!

Aufgabe 7: (*Kondition als Maß für Fehlerfortpflanzung*)

Sei $\|\ \|$ eine (Vektor-) Norm auf $\mathbb{K}^n$, sei $\|\ \|_M$ eine mit ihr verträgliche submultiplikative (Matrix-) Norm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$, und sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie:

(a) falls eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ der Ungleichung

$$\frac{\|A-B\|_M}{\|A\|_M} < \frac{1}{\mathrm{cond}_M(A)} \tag{1}$$

genügt, dann ist B auch invertierbar und es gilt

$$\|B^{-1}A\|_M \in \left[\frac{\|E_n\|_M}{1+\|A^{-1}(B-A)\|_M}, \frac{\|E_n\|_M}{1-\|A^{-1}(B-A)\|_M}\right].$$

(b) Sei $\|\Delta A\|_M \cdot \|A^{-1}\|_M < 1$, dann ist für alle $\mathbf{b}, \Delta\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ das gestörte lineare Gleichungssystem

$$(A+\Delta A)\cdot(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}$$

eindeutig lösbar und, für $\mathbf{b} \neq 0$, genügt der relative Fehler der Lösung folgender Abschätzung:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\mathrm{cond}_M(A)\cdot\|E_n\|_M}{1-\mathrm{cond}_M(A)\cdot\frac{\|\Delta A\|_M}{\|A\|_M}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|_M}{\|A\|_M} + \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}\right) \tag{2}$$

(mit $\mathbf{x}$ der eindeutigen Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$).

HINWEIS: Benutzen Sie die Abschätzung aus Teil (a).

(c) Konstruieren Sie im Fall, daß $\Delta A = 0$ und $\|\ \|_M = |||\ |||$ die induzierte Norm ist, Vektoren $\mathbf{b}$ und $\Delta\mathbf{b} \neq 0$, so daß in (2) Gleichheit gilt.

Rechnerübungen

Abgabetermin: Montag, 25.11.2002, 18:00 Uhr

Aufgabe R1: Erweitern Sie die Klasse `matrix`[1] um einen Multiplikationsoperator `operator*`. Orientieren Sie sich hierbei an dem schon vorhandenen Additionsoperator `operator+`. Der Operator ist in `matrix.h` zu deklarieren und in `matrix.cc` zu definieren. Danach soll man mit `A*B` das Produkt zweier Matrizen `A` und `B` berechnen können. Falls dieses nicht definiert ist, so soll eine entsprechende Fehlermeldung “ausgeworfen” werden. Testen Sie Ihre Matrixmultiplikation an einigen Beispielen.

[1]siehe `http://www.mathematik.uni-kl.de/~mschulze/matrix.html`