FB Mathematik
HD Dr. C. Lossen
Dr. M. Schulze



# Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 25.11.2002, 18:00 Uhr

**Aufgabe 8:** Untersuchen Sie, welche der folgenden Matrizen eine LR-Zerlegung besitzen. Geben Sie gegebenenfalls die Matrizen $L$ und $R$ an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 9:** (*Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche*)
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2.1 & 2512 & -2516 \\ -1.3 & 8.8 & -7.6 \\ 0.9 & -6.2 & 4.6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6.5 \\ 5.3 \\ -2.9 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie $Ax = \mathbf{b}$ in 5-stelliger Gleitpunktarithmetik (wie definiert Aufgabe 1, mit: $L = 5$, $B = 10$)

(a) mit Hilfe der Gauß-Elimination mit folgender Pivotstrategie: wähle als Pivotelement im Schritt $i$ ein Spaltenelement $a_{ki}^{(i-1)}$ $(i \leq k \leq n)$ mit
$$\left|a_{ki}^{(i-1)}\right| = \max\left\{|a_{ji}^{(i-1)}| \,\middle|\, i \leq j \leq n\right\};$$

(b) mit Hilfe der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche.

Vergleichen Sie die berechneten Näherungen für die eindeutige Lösung $x = (-5, -1, -1)$, und begründen Sie ihre Beobachtung (siehe auch Aufgabe 10).

**Aufgabe 10:** Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar. Zeigen Sie:

(a) es existiert eine invertierbare Diagonalmatrix $D$, so daß alle Zeilen von $B := D \cdot A$ dieselbe Betragssumme haben, d.h.
$$\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = ||B||_\infty, \qquad i = 1, \ldots n. \tag{1}$$
Eine solche Matrix $B = D \cdot A$ wird *"zeilenäquilibriert"* genannt.

(b) Falls eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Bedingung (1) erfüllt, dann gilt für jede invertierbare Diagonalmatrix
$$\mathrm{cond}_\infty(B) \leq \mathrm{cond}_\infty(D \cdot B).$$

Rückseite beachten!

**Aufgabe 11:** (*LR-Zerlegung einer Tridiagonalmatrix*)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ Tridiagonalgestalt hat:

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ d_2 & a_2 & c_2 & & \mathbf{0} & \\ & d_3 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & d_n & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i, c_i, d_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Desweiteren seien folgende Abschätzungen für die Einträge von $A$ gegeben (mit $d_1 := 0$, $c_n := 0$):

$$|a_i| > |c_i| + |d_i| \quad \text{for } i = 1, \ldots, n\,.$$

(a) Geben Sie einen Algorithmus an, um $A$ in die folgende Form zu zerlegen:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ d_2 & \alpha_2 & & \mathbf{0} & \\ & d_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & d_n & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & \mathbf{0} & \\ & 1 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \gamma_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist der Aufwand an Multiplikationen/Divisionen?

(b) Zeigen Sie, daß $A$ invertierbar ist, und beweisen Sie folgende Abschätzungen:

(i) $|\gamma_i| < 1$ für $i = 1, \ldots, n-1$;

(ii) $|\alpha_i| \in \Big[|a_i| - |d_i|\,,\ |a_i| + |d_i|\Big]$ für $i = 2, \ldots, n$.

(c) Geben Sie einen einfachen Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Hilfe der Zerlegung aus (a) an.

---

Rechnerübungen

---

Abgabetermin: Montag, 02.12.2002, 18:00 Uhr

**Aufgabe R2:**

(a) Erweitern Sie die Klasse `matrix` um die Methoden `RowSumNorm`, `ColSumNorm` und `FrobNorm` zur Berechnung der Zeilensummen-, Spaltensummen- und Frobeniusnorm.

(b) Schreiben Sie die in `matrix.h` (neu[1]) deklarierte Klasse `LRdec` zur Berechnung der LR-Zerlegung *ohne* Pivotsuche.

[1] cf. `http://www.mathematik.uni-kl.de/~mschulze/download/matrix-r2.tgz`