FB Mathematik
HD Dr. C. Lossen
Dr. M. Schulze

Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 02.12.2002, 18:00 Uhr

Aufgabe 12: (*Cholesky-Verfahren*)

Gegeben seien die symmetrischen Matrizen

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 14 & -6 \\ -2 & 10 & -1 & 18\alpha \\ 14 & -1 & 54 & -13 \\ -6 & 18\alpha & -13 & 39 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Cholesky-Zerlegung

$$A(\alpha) = L(\alpha) \cdot \overline{L(\alpha)}^T$$

existiert, und berechnen Sie jeweils $L(\alpha)$.

Aufgabe 13: (*Kondition des Schur-Komplements*)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine hermitesche, positiv definite Matrix mit der Blockzerlegung

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{11} \in \mathbb{K}^{p\times p},$$

und dem Schur-Komplement $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

(a) Bestimmen Sie $B \in \mathbb{K}^{p\times(n-p)}$, $C \in \mathbb{K}^{p\times p}$, so daß

$$A = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ \overline{B}^T & E_{n-p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_p & B \\ 0 & E_{n-p} \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)},$$

wobei $\lambda_{\max}(A)$, bzw. $\lambda_{\min}(A)$, den größten, bzw. kleinsten, (reellen) Eigenwert von A und, wie üblich, cond_2 die Kondition bzgl. der Spektralnorm $\|\ \|_2$ bezeichnet.

(c) Verwenden Sie (a) und (b) um zu beweisen, daß

$$\mathrm{cond}_2(S) \leq \mathrm{cond}_2(A),$$

Rückseite beachten!

Aufgabe 14: (*Toeplitz und Persymmetrie*)

(a) Sei $z \in \mathbb{R}^n$ und $M := (e_2, e_3, \ldots, e_n, e_1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei e_i den i-ten kartesischen Einheitsvektor bezeichnet. Ferner sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch

$$A := \left(z,\, Mz,\, M^2 z,\, \ldots\, ,\, M^{n-1} z\right) .$$

Zeigen Sie, daß A, A^T und $A^T A$ jeweils Toeplitz-Matrizen sind.

(b) Zeigen Sie, daß jede Toeplitz-Matrix A *persymmetrisch* ist, d.h. es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \cdot A^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnerübungen

Abgabetermin: Montag, 09.12.2002, 18:00 Uhr

Aufgabe R3:

(1) Modifizieren Sie den Konstruktor der Klasse `LRdec`, so daß `LRdec(A)` eine LR-Zerlegung $PA = LR$ mit Spaltenpivotisierung berechnet. Hierbei kann man die Zeilenvertauschungen zunächst in einem Vertauschungsvektor (vom Typ `vector<int>`) speichern und erst nach der eigentlichen Berechnung ausführen. Falls keine LR-Zerlegung existiert, so soll eine entsprechende Fehlermeldung "ausgeworfen" werden.

(2) Erweitern Sie die Klasse `LRdec` um eine Methode `Solve` zur Berechnung einer Matrixlösung X des Gleichungssystems $A \cdot X = B$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

(3) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe Ihrer Klasse `LRdec`.

Was passiert, wenn Sie Ihren Solver auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

anwenden?