FB Mathematik — WS 2002/03, Blatt 5
HD Dr. C. Lossen
Dr. M. Schulze

Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 09.12.2002, 18:00 Uhr

Aufgabe 15: (*Algorithmus von Trench*)

(a) Zeigen Sie, daß

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

positiv definit ist.

(b) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Trench die Inverse T^{-1}.

Aufgabe 16: (*Abschätzungen zu Spektralradius (II)*)

(a) Sei $\| \ \|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{C}^n$, und sei $||| \ |||$ die induzierte Matrix-Norm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$.
Zeigen Sie, daß für jede invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch

$$\|x\|_S := \|Sx\|$$

eine Vektornorm auf $\mathbb{C}^n$ definiert wird, deren zugehörige induzierte Matrix-Norm gegeben ist durch

$$|||A|||_S := |||SAS^{-1}||| \quad \text{für alle } A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und sei $J = V^{-1}AV$ ($V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar) die Jordan-Normalform von A. Ferner sei $\| \ \| = \| \ \|_\infty$ und

$$S_\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & & & & \\ & \varepsilon^{-2} & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & \varepsilon^{-n+1} & \\ & & & & \varepsilon^{-n} \end{pmatrix} \cdot V^{-1}$$

mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$|||A|||_{S_\varepsilon} \le \rho(A) + \varepsilon.$$

Rückseite beachten!

Aufgabe 17: (*Iterationsverfahren zur Berechnung der Wurzel*)
Sei $a \in (0, 2) \subset \mathbb{R}$ und $b := 1 - a$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\Phi : [-|b|, |b|] \longrightarrow [-|b|, |b|] \ , \quad x \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + b\right)$$

eine Kontraktion ist und bestimmen Sie den Kontraktionsfaktor. Nutzen Sie diese Kenntnis, um ein Iterationsverfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$ zu entwickeln.

Führen Sie 6 Iterationsschritte zur Berechnung von $\sqrt{0.5 * 10^0}$ (mit 8–stelliger Gleitpunktarithmetik, d.h. $B = 10$, $L = 8$ in der Notation von Aufgabe 1) aus. Wählen Sie als Startwert $x^{(0)} = 0.5 * 10^0$.

Rechnerübungen

Abgabetermin: Montag, 16.12.2002, 18:00 Uhr

Aufgabe R4:

(1) Erweitern Sie die Klasse `matrix` um eine Methode `Trans` zur Berechnung der transponierten Matrix.
(2) Schreiben Sie analog zur Klasse `LRdec` aus Aufgabe R3 eine Klasse `Cholesky` zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung. Insbesondere soll diese ebenfalls über eine Methode `Solve` zum Lösen von Matrixgleichungen verfügen.
(3) Testen Sie Ihre Klasse (unter anderem) mit den Beispielen aus Aufgabe R3.