HD Dr. C. Lossen
Dr. M. Schulze

Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 16.12.2002, 18:00 Uhr

Aufgabe 18: (*Fehlerabschätzung bei Iterationsverfahren*)
Sei $W \subset \mathbb{K}^n$ abgeschlossen, $\Phi : W \to W$ eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionsfaktor $0 \leq q < 1$, und sei $\hat{x} \in W$ der eindeutige Fixpunkt von Φ. Durch Rundung entstehe aus Φ die Abbildung $\Phi + \Delta\Phi$ mit

$$\|\Delta\Phi(x)\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in W.$$

Zeigen Sie, daß die Iteration $y^{(k)} := (\Phi + \Delta\Phi)(y^{(k-1)})$, $k \geq 1$ folgender Abschätzung genügt:

$$\| \hat{x} - y^{(k)} \| \leq \frac{1}{1-q} \cdot \left(\varepsilon + q^k \cdot \| y^{(1)} - y^{(0)} \| \right) .$$

Aufgabe 19: (*Konsistent geordnete Matrizen*)
Sei $A = (D - L - R) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit invertierbarer Diagonalmatrix $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ (wobei L, R linke untere, bzw. rechte obere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen 0 sind).

A heißt *konsistent geordnet*, falls für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\sigma_w\left(D^{-1} \cdot \left(zL + z^{-1}R\right)\right) = \sigma_w\left(D^{-1}\left(L + R\right)\right),$$

wobei σ_w das "gewichtete" Spektrum (= Menge der Eigenwerte, gewichtet mit der jeweiligen Vielfachheit) bezeichnet.

Zeigen Sie:

(a) Jede Blocktridiagonalmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & -R_1 & & & & \\ -L_2 & D_2 & -R_2 & & \mathbf{0} & \\ & -L_3 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & -R_{r-1} \\ & & & & -L_r & D_r \end{pmatrix},$$

wobei $D_i \in \mathbb{K}^{q_i \times q_i}$, $i = 1, \dots, r$, invertierbare Diagonalmatrizen sind, ist konsistent geordnet.

HINWEIS: Konjugierte Matrizen habe dieselben Eigenwerte....

(b) Falls A konsistent geordnet ist, so gilt:

- μ Eigenwert von $D^{-1}(L + R) \iff -\mu$ Eigenwert von $D^{-1}(L + R)$
- $\sigma_w\left(zD^{-1}L + wD^{-1}R\right) = \sigma_w\left(\sqrt{zw} \cdot D^{-1}(L + R)\right)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 20: (*Konsistent geordnete Matrizen und Relaxationsverfahren*) Sei $A = D - L - R \in \mathbb{K}^{n\times n}$ konsistent geordnet (insbesondere D invertierbare Diagonalmatrix, siehe Aufgabe 19), und betrachten Sie die *Relaxationsoperatoren*

$$H(\omega) := E_n - \omega \cdot (D - \omega L)^{-1} A\,, \qquad \omega \in (0,2)\,,$$

insbesondere also:

$$H(1) = E_n - (D-L)^{-1}A = (D-L)^{-1}R \quad \text{(Einzelschrittoperator)}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\rho\big(H(\omega)\big) \geq \sqrt[n]{|\det(H(\omega))|} = |\omega - 1|$.

(b) Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\det\big(\lambda E_n - H(\omega)\big) = \det\big((\lambda + \omega - 1)E_n \pm \omega\sqrt{\lambda} \cdot D^{-1}(L+R)\big)\,.$$

HINWEIS: Aufgabe 19 (b), charakteristisches Polynom.....

(c) $H(\omega)$, $\omega \in (0,2)$, hat genau dann den Eigenwert $\lambda \neq 0$, falls

$$\mu = \pm \frac{(\lambda + \omega - 1)}{\sqrt{\lambda}\omega}$$

Eigenwerte von $D^{-1}(L+R)$ sind.

ZUSATZ (freiwillig): Zeigen sie, daß, falls $\rho_{GSV} := \rho\big(D^{-1}(L+R)\big) < 1$ und falls alle Eigenwerte von $D^{-1}(L+R)$ reell sind, der Spektralradius von $H(\omega)$ minimal wird für

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_{GSV}}}\,.$$

Berechnen Sie den "optimalen" Spektralradius und vergleichen Sie ihn mit ρ_{GSV}, ρ_{ESV}.

Rechnerübungen

Abgabetermin: Montag, 06.01.2003, 18:00 Uhr

Aufgabe R6: Erweitern Sie die Klasse `matrix` um die Methoden `Jacobi` und `GaussSeidel` zur iterativen Lösung einer Matrixgleichung $A \cdot X = B$ nach dem Jacobi-Verfahren (GSV) bzw. Gauss-Seidel-Verfahren (ESV).

Als Parameter sollen B sowie die maximale Anzahl der Iterationen und die gewünschte Genauigkeit des Residuums übergeben werden können. Das Residuum soll jeweils mit möglichst geringem zusätzlichem Rechenaufwand berechnet werden. Bei Misserfolg, soll eine entsprechende Fehlermeldung "ausgeworfen" werden.