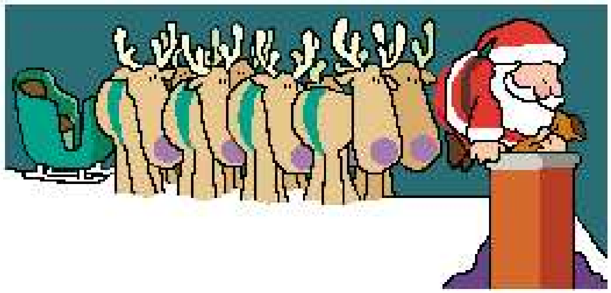
FB Mathematik
HD Dr. C. Lossen
Dr. M. Schulze

WS 2002/03, Blatt 7

Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 06.01.2003, 18:00 Uhr



Aufgabe 21: (*CG-Verfahren: Koordinatensystem*)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, und sei $\mathbf{x}^{(k)}$ die k-te Iterierte des CG-Verfahrens angewandt auf das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Startvektor $\mathbf{x}^{(0)}$.

Zeigen Sie, daß die Iteration *von der Wahl des zugrundeliegenden orthonormalen Koordinatensystems unabhängig ist*, d.h. falls $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix und $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}$ die k-te Iterierte des CG-Verfahrens angewandt auf das lineare Gleichungssystem $UAU^T \cdot \tilde{\mathbf{x}} = U\mathbf{b}$ mit Startvektor $\tilde{\mathbf{x}}^{(0)} = U\mathbf{x}^{(0)}$ ist, so gilt $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} = U\mathbf{x}^{(k)}$.

Aufgabe 22: (*CG-Verfahren: Beispiele*)

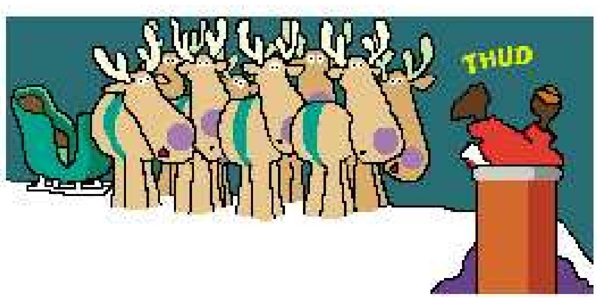
(a) Bestimmen Sie die (exakte) Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

indem Sie das CG-Verfahren mit Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$ (von Hand) durchführen.

(b) Zeigen Sie allgemein, daß das CG-Verfahren für $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (mit beliebigem Startvektor) nach maximal zwei Iterationen die exakte Lösung berechnet hat, falls $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch und positiv definit ist und nur (maximal) zwei verschiedene Eigenwerte hat.

HINWEIS: Aufgabe 21.



Aufgabe 23: (*CG-Verfahren: Monotonieverhalten*)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, und sei $\mathbf{x}^{(k)}$ die k-te Iterierte (und $\mathbf{d}^{(k)}$ die k-te “Suchrichtung”) des CG-Verfahrens angewandt auf das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = 0$.

Zeigen Sie: falls das Verfahren erst nach $m+1$ Schritten abbricht, d.h. für $j \leq m$ ist $\mathbf{x}^{(j)} \neq A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}^{(m+1)}$, so gelten folgende Abschätzungen:

(a) $(\mathbf{d}^{(k)})^T \cdot \mathbf{d}^{(j)} \geq 0$ für alle $j, k = 0. \ldots, m$;

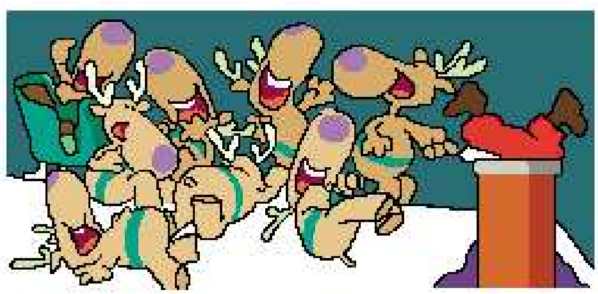
(b) $\| \mathbf{x}^{(k+1)} \|_2 \geq \| \mathbf{x}^{(k)} \|_2$ für alle $k = 0, \ldots, m$;

(c) $\| \mathbf{x}^{(k+1)} - A^{-1}\mathbf{b} \|_2 \leq \| \mathbf{x}^{(k)} - A^{-1}\mathbf{b} \|_2$ für alle $k = 0, \ldots, m$.

Bestimmen Sie alle Residuen $\mathbf{r}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b},\ k \geq 0$, für den Fall

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 0\,.$$

Geben Sie Parameter β und λ an, für welche die Folge $\left(\|\mathbf{r}^{(k)}\|_2\right)_{k=0,..,2}$ nicht monoton fällt. Welches Verhalten tritt für $\beta = 1$ auf?



Rechnerübungen

Abgabetermin: Montag, 13.01.2003, 18:00 Uhr

Aufgabe R6:

(a) Erweitern Sie die Klasse `matrix` um die Methode `ConjGrad` zur iterativen Lösung einer Gleichung $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nach dem Verfahren der konjugierten Gradienten. Als Parameter soll der Vektor $\mathbf{b}$ sowie die maximale Anzahl der Iterationen und die gewünschte Genauigkeit des Residuums übergeben werden können. Bei Misserfolg, soll eine entsprechende Fehlermeldung “ausgeworfen” werden.

(b) Vergleichen Sie die bisher programmierten Iterationsverfahren. Finden Sie Beispiele, in denen die verschiedenen Verfahren besser oder schlechter funktionieren.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2003 !