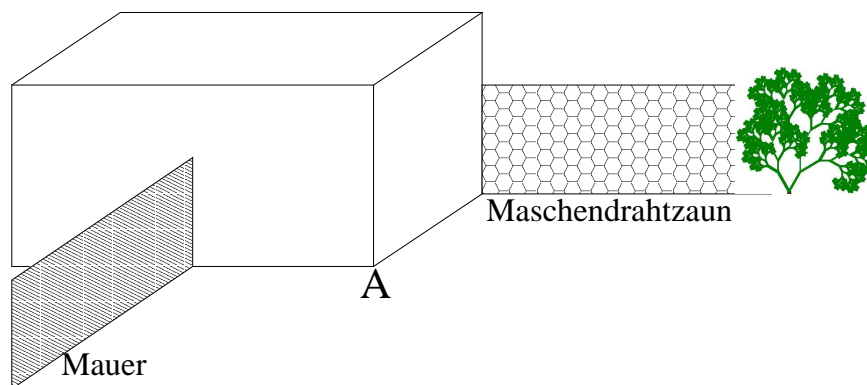


Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 13.01.2003, 18:00 Uhr

Aufgabe 24: (Ausgleichsrechnung)

Herr Schulze und Herr Westenberger führen schon seit langem einen erbitterten Nachbarschaftsstreit. Ein besonderer Zankapfel ist die neue Garage von Herrn Westenberger. Um festzustellen, ob Herr Westenberger vielleicht die Bauvorschriften verletzt hat, möchte Herr Schulze unbedingt feststellen, welche Ausmaße die (quaderförmige) Garage hat. Parallel zur kürzeren Bodenkante verläuft eine Mauer, die ziemlich genau an der Mitte der längeren Kante ansetzt (siehe Bild) an der anderen (für Herrn Schulze frei zugänglichen) Ecke setzt ein Maschendrahtzaun an, der parallel zur längeren Bodenkante verläuft.



Natürlich möchte Herr Schulze dabei nicht entdeckt werden. So schleicht er sich an eine Ecke A und wirft sein Bandmaß (natürlich mit einem Gewicht am vorderen Ende...) von dort aus über die Garage, so daß es auf der anderen Seite wieder den Boden berührt. Dies macht er entlang beider Bodenkanten, die in A enden. Er misst 11,67 m bzw. 16,28 m.

Da Herr Ilsen, der Herrn Schulze beim Auswerten helfen will, ihm mit auf den Weg gegeben hat, möglichst viele Daten zu besorgen, misst letzterer auch noch die Strecke vom Maschendrahtzaun bis zur Mauer (entlang der Bodenkanten der Garage) und erhält 8,58 m. Nun will er auch noch die Höhe der Garage und die Länge der kürzeren Bodenkante messen. Dabei wird er jedoch entdeckt, weswegen er sich auf sein Schätzvermögen verlassen muß. Die Garage ist ca. 3,50 m hoch und 4 m breit.

Können Sie Herrn Schulze und Herrn Ilsen beim Bestimmen der Maße der Garage helfen?

Aufgabe 25: (Singularwertzerlegung)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- (b) Berechnen Sie die Pseudoinverse A^\dagger von A und bestimmen Sie eine Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ des Minimierungsproblems $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$. Ist die Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ eindeutig festgelegt?

Aufgabe 26: (Tichonov-Funktional)

Das quadratische Tichonov-Funktional zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einem Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sei gegeben durch

$$T_\alpha(\mathbf{x}) := \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{x}\|_2^2$$

wobei $\alpha > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie (für alle $\alpha > 0$):

- (a) Es gibt eine eindeutige Lösung $\mathbf{x}_\alpha \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems

$$(A^T A + \alpha E_n) \cdot \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

- (b) Das Tichonov-Funktional T_α hat ein eindeutig bestimmtes Minimum in \mathbb{R}^n und dieses ist gleich \mathbf{x}_α .
- (c) Ist A^\dagger die Pseudoinverse von A , dann gilt $\mathbf{x}_\alpha \rightarrow A^\dagger \mathbf{b}$ für $\alpha \rightarrow 0$.
- (d) $\|\mathbf{x}_\alpha\|_2$ ist monoton fallend und $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_\alpha\|_2$ ist monoton wachsend in α .

HINWEIS: Singularwertzerlegung von A .