

Aufgabe 28: (Householder-Matrizen)

Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{K}^m$ mit $\|\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{w}\|_2 = 1$, und seien

$$P_{\mathbf{v}} = E_m - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T, \quad P_{\mathbf{w}} = E_m - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$$

die zugehörigen Householder-Matrizen.

- Zeigen Sie, daß die Matrix $P := P_{\mathbf{v}}P_{\mathbf{w}}$ diagonalisierbar ist und daß ihre Eigenwerte alle auf dem Einheitskreisrand in \mathbb{C} liegen.
- Bestimmen Sie die Eigenwerte von P .

HINWEIS ZU (b): Betrachten Sie $W := \text{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ und W^\perp (unter Berücksichtigung der möglichen Fälle).

Aufgabe 29: (QR-Verfahren)

Gegeben sei das überbestimmte lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 0 & 6 \\ -3 & 8 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -71/5 \\ 117/10 \\ 7 \\ 21/5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der QR-Zerlegung (mit exakter Arithmetik) die Lösung $\hat{\mathbf{x}} = A^\dagger \mathbf{b}$ des linearen Ausgleichproblems sowie $\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|_2$.

Rechnerübungen

Abgabetermin: Montag, 27.01.2003, 18:00 Uhr

Aufgabe R7:

- Schreiben Sie in Analogie zur Klasse `LRdec` eine Klasse `QRdec` zur Berechnung der QR-Zerlegung. Die QR-Zerlegung bestehend aus Householder-Vektoren $\mathbf{v}^{(i)}$ und oberer Dreiecksmatrix R soll im Konstruktor berechnet und komplett in nur *einer* Matrix `vR` abgespeichert werden. Hierzu sind die Householder-Vektoren auf $v_1^{(i)} = 1$ zu normieren und nur die Komponenten $v_j^{(i)}$ mit $j \geq 2$ unterhalb der Diagonalen von `vR` abzuspeichern. Als Zwischenspeicher bei der Berechnung soll lediglich eine Matrix `w` für den Vektor \mathbf{w} aus dem QR-Algorithmus der Vorlesung angelegt werden. Die Faktoren $\beta^{(i)}$ aus der Vorlesung sollen wie `vR` als Matrix `beta` zu den Daten der Klasse gehören.

Beachten Sie, daß die $\beta^{(i)}$ durch die Normierung der Householder-Vektoren eine andere Gestalt haben als in Vorlesung.

- Erweitern Sie die Klasse `QRdec` um eine Methode `Solve` zur Lösung des linearen Ausgleichproblems "minimiere $\|A \cdot X - B\|_F$ ", d.h. zur simultanen Lösung der linearen Ausgleichprobleme "minimiere $\|A \cdot \mathbf{x}_j - \mathbf{b}_j\|_2$ ", wobei \mathbf{x}_j bzw. \mathbf{b}_j die Spaltenvektoren von X bzw. B sind. Hierbei sollen die bei der Berechnung der QR-Zerlegung gespeicherten Faktoren $\beta^{(i)}$ benutzt werden.
- Testen Sie Ihre Klasse an den Beispielen aus der Vorlesung bzw. Aufgabe 29.