

Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 27.01.2003, 18:00 Uhr

Aufgabe 30: (Konvergenzordnung von Iterationsverfahren)

Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ das Iterationsverfahren

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \Phi_\alpha(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

wobei $\Phi_\alpha : D_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ die maximale stetige Fortsetzung der durch

$$x \mapsto \frac{x^2 \cdot (2x + 3\alpha)}{x^2 + 2\alpha x + 2\alpha - 2}$$

gegebenen Abbildung ist.

- Zeigen Sie, daß $\hat{x} := 0$ ein Fixpunkt von Φ_α ist.
- Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche das Iterationsverfahren (1) lokal bei \hat{x} konvergiert.
- Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz die genaue Konvergenzordnung.

Aufgabe 31: (Beispiel zum Banachschen Fixpunktsatz)

Sei $Q := [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^3$ und $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} x_1 e^{-x_2^2} + x_1 x_3 + 3 \\ \sin(\pi x_1) + \frac{1}{1+x_2} \\ \ln(1 + x_2^2 + x_3^2) - 1 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, daß φ eine bzgl. der Maximumsnorm kontrahierende Selbstabbildung auf Q definiert (mit Kontraktionsfaktor $q = 5/6$).
- Betrachten Sie nun das Iterationsverfahren

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \varphi(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

mit Startwert $\mathbf{x}^{(0)} = (1/2, 0, 0)^T$. Wieviele Iterationsschritte sind notwendig, um den (eindeutigen) Fixpunkt $\hat{\mathbf{x}}$ von φ in Q bis auf einen Fehler (bzgl. Maximumsnorm) von $\leq 1/1000$ zu bestimmen?

Aufgabe 32: (Varianten des Newton-Verfahrens)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) eine $(p+1)$ -mal stetig differenzierbare reelle Funktion, $p \geq 2$, welche in \hat{x} eine p -fache Nullstelle habe. Betrachten Sie nun das Iterationsverfahren

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - p \cdot \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

zur Berechnung von \hat{x} .

- (a) Bestimmen Sie die (lokale) Konvergenzordnung des Verfahrens (2).
- (b) Zeigen Sie, daß das Iterationsverfahren (2) lokal bei \hat{x} übereinstimmt mit dem Newton-Verfahren, angewandt auf eine (lokal bei \hat{x} wohl-definierte) Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g^p = f$.
- (c) Wie lautet das Newton-Verfahren, angewandt auf die (lokal bei \hat{x} wohl-definierte) stetige Fortsetzung der Funktion

$$h := \frac{f}{f'},$$

und welche Konvergenzordnung hat es?