

## Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 03.02.2003, 18:00 Uhr

### Aufgabe 33: (Lösungsverfahren im Vergleich)

Berechnen Sie (mit 8-stelliger Rechnerarithmetik) die positive Nullstelle der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = e^{2x} - \sin(x) - 2$$

- (a) mit der Regula falsi,  $x^{(0)} = 0$ ,  $x^{(1)} = 1$ ;
- (b) mit der Sekantenmethode,  $x^{(0)} = 0.25$ ,  $x^{(1)} = 0.35$ ;
- (c) mit dem Newton-Verfahren,  $x^{(0)} = 0.25$ ;
- (d) mit dem vereinfachten Newton-Verfahren,  $x^{(0)} = 0.25$ .

Vergleichen Sie das Konvergenzverhalten.

### Aufgabe 34: (Newton-Verfahren: Konvergenzverhalten (1))

Betrachten Sie die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

- (a) Zeigen Sie, daß das Newton-Verfahren für jeden Startwert  $x^{(0)}$  mit  $|x^{(0)}| \geq 2$  gegen eine Nullstelle von  $f$  konvergiert.
- (b) Führen Sie jeweils drei Iterationsschritte des Newton-Verfahrens aus mit Startwert  $x^{(0)} = 2.5$ , bzw.  $x^{(0)} = -1.52$  (skizzieren sie die Berechnungen am Graphen der Funktion  $f$ ). Was fällt auf?
- (c) Geben Sie einen Startwert  $x^{(0)} \in \mathbb{R}$  an, für den das Newton-Verfahren durchführbar ist (d.h.  $f'(x^{(k)}) \neq 0$  für alle  $k$ ), aber *nicht* konvergiert!

### Aufgabe 35: (Newton-Verfahren: Konvergenzverhalten (2))

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare *konvexe* Funktion, d.h.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in (0, 1)).$$

Zeigen Sie:

- (a) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:
  - (i)  $f(x) - f(y) \geq f'(y) \cdot (x - y)$ .
  - (ii)  $(f'(y) - f'(x)) \cdot (y - x) \geq 0$ .
- (b) Ist  $f$  zusätzlich streng monoton wachsend, und sei  $\hat{x}$  eine Nullstelle von  $f$ , so ist letztere eindeutig und die Iterierten  $x^{(k)}$  des Newton-Verfahrens (für beliebigen Startwert  $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ ) erfüllen:
  - (i)  $\hat{x} \leq \dots \leq x^{(k+1)} \leq x^{(k)} \leq \dots \leq x^{(1)}$ ,
  - (ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \hat{x}$ .
- (c) Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = e^{x+1} - 2$  erfüllt die Voraussetzungen in (b).

Führen Sie für die Funktion in (c) fünf Iterationsschritte des Newtonverfahrens mit Startwert  $x^{(0)} = -1$  aus (mit 8-stelliger Rechnerarithmetik).

---

## Rechnerübungen

---

Abgabetermin: Montag, 10.02.2003, 18:00 Uhr

**Aufgabe R8:** In `matrix-R9.tgz` finden Sie die unvollständige Klasse `poly`. Diese ist von der Klasse `vector<float>` abgeleitet, d.h. Objekte von `poly` sind insbesondere Vektoren aus Fließkommazahlen. Ein solcher Vektor soll nun als Polynom in einer Variablen betrachtet werden. Das  $i$ -te Element des Vektors ist der Koeffizient vor der  $i$ -ten Potenz der Variablen des entsprechenden Polynoms. Dem Konstruktor von `poly` übergibt man den maximalen Grad des Polynoms. Diesen erhält man mittels der Methode `MaxDeg` zurück. Die Methode `Deg` liefert den wirklichen Grad des Polynoms wobei der Grad des Nullpolynoms gleich  $-1$  ist. Mit der Methode `Coef` greift man auf die Koeffizienten des Polynoms zu.

- (1) Schreiben Sie die Methode `Eval` zum Auswerten eines Polynoms, d.h. zum Einsetzen eines Wertes für die Variable.
- (2) Schreiben Sie einen Multiplikationsoperator zur Multiplikation zweier Polynome.
- (3) Schreiben Sie die Methode `Diff` zur Berechnung der (formalen) Ableitung eines Polynoms.
- (4) Schreiben Sie die Methode `Newton` zur (näherungsweise) Bestimmung einer Nullstelle eines Polynoms mittels des Newtonverfahrens. Als Parameter sollen eine Näherungslösung, die gewünschte Genauigkeit und die maximale Anzahl der Iterationsschritte übergeben werden. Im Falle des Mißerfolgs soll eine entsprechende Fehlermeldung ausgeworfen werden.