FB Mathematik
HD Dr. C. Lossen
Dr. M. Schulze

Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 10.02.2003, 18:00 Uhr

Aufgabe 36: *Bestimmung komplexer Nullstellen reeller Polynome*)

Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ ein reelles Polynom (vom Grad n). Ist nun $z = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ eine komplexe Nullstelle von f, so ist bekanntlich auch $\bar{z} = u - iv$ eine Nullstelle von f, und das Produkt der zugehörigen Linearfaktoren

$$(x - z) \cdot (x - \bar{z}) = x^2 - 2ux + (u^2 + v^2)$$

ist ein (reeller) quadratischer Teiler von f. Ziel ist es nun mit Hilfe des Newton-Verfahrens alle reellen quadratischen Teiler $x^2 - px - q$ $(p, q \in \mathbb{R})$ von f zu bestimmen (in Analogie zur Bestimmung der reellen Nullstellen).

(a) Zeigen Sie, daß mittels Division mit Rest R von f durch $x^2 - px - q$ die Aufgabe der Bestimmung von p, q äquivalent ist zu der (polynomialen) Nullstellenaufgabe

$$b_{n-1}(p, q) = 0\,, \quad b_n(p, q) = 0\,. \tag{1}$$

Wählen Sie dabei b_{n-1}, b_n so, daß $R = b_{n-1} \cdot (x - p) + b_n$.

(b) Geben Sie Rekursionsformeln zur Berechnung der Funktionen b_{n-1}, b_n sowie der jeweiligen partiellen Ableitungen nach p und q an. Zeigen Sie, daß sich der Iterationsschritt des Newtonverfahrens für (1) schreiben läßt als

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \frac{b_n c_{n-3} - b_{n-1} c_{n-2}}{c_{n-2}^2 - c_{n-1} c_{n-3}}\,, \quad q^{(k+1)} = q^{(k)} + \frac{b_{n-1} c_{n-1} - b_n c_{n-2}}{c_{n-2}^2 - c_{n-1} c_{n-3}}$$

mit $b_i = b_i(p^{(k)}, q^{(k)})$ und geeigneten Termen $c_i = c_i(p^{(k)}, q^{(k)})$.

(c) Stellen Sie die Berechnung der auftretenden Terme in einem übersichtlichen Schema (für die Handrechnung) dar.

(d) Nutzen Sie (c), zur Berechnung von $p^{(1)}$, $q^{(1)}$ im Fall

$$f = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 18x - 12$$

mit Startwerten $p^{(0)} = -2$, $q^{(0)} = -5$.

Aufgabe 37: (*Newton-Verfahren zur Lösung von Eigenwertproblemen*)

Gegeben sei eine reelle, symmetrische $n \times n$–Matrix A. Dem Eigenwertproblem

“Bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche das Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}\,, \quad \|\mathbf{x}\|_2^2 = 1$$

eine Lösung hat!”

läßt sich offensichtlich folgende Nullstellenaufgabe zuordnen

"Bestimme alle Nullstellen $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *der reellen Abbildung*

$$\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} - 1 \end{pmatrix} \text{! "}$$

(a) Zeigen Sie, daß φ stetig differenzierbar ist mit

$$D\varphi \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \lambda E_n & -\mathbf{x} \\ 2\mathbf{x}^T & 0 \end{pmatrix}$$

und daß für alle $\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n+1}$ folgende Ungleichung gilt:

$$\left\| D\varphi\left(\mathbf{t}^{(1)}\right) - D\varphi\left(\mathbf{t}^{(2)}\right) \right\|_\infty \leq 2(n+1) \cdot \left\| \mathbf{t}^{(1)} - \mathbf{t}^{(2)} \right\|_\infty .$$

(b) Zeigen Sie, daß für ein Eigenpaar $\mathbf{x}, \lambda$ von A die Jakobi-Matrix $D\varphi \binom{\mathbf{x}}{\lambda}$ genau dann invertierbar ist, wenn λ ein einfacher Eigenwert von A ist.

(c) Folgern Sie, daß für einen *einfachen* Eigenwert λ von A und einen zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{x}$ mit $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ das Newton-Verfahren (angewandt auf φ) lokal quadratisch gegen $\binom{\mathbf{x}}{\lambda}$ konvergiert.

Aufgabe 38: (*Beispiel zu Einschließungssätzen*)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie mit Hilfe der Sätze von Gerschgorin und Bendixson eine möglichst kleine Teilmenge der komplexen Zahlen an, welche das Spektrum $\sigma(A)$ enthält. Skizzieren Sie diese Menge.

Aufgabe 39: (*Gerschgorin-Kreise: disjunkter Fall*)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so daß die zugehörigen Gerschgorin-Kreise *paarweise disjunkt* sind. Zeigen Sie:

(a) Jeder Gerschgorin-Kreis enthält genau einen Eigenwert von A.

(b) Falls alle Einträge von A reell sind, so sind auch alle Eigenwerte reell.

HINWEIS ZU (a): Zerlegen Sie $A = D + N$ in den Diagonal- und Nebendiagonalanteil und betrachten Sie die Eigenwerte der Schar $A_t = D + tN,\ 0 \leq t \leq 1$.