

Numerische Methoden der Linearen Algebra

Abgabetermin: Montag, 17.02.2003, 18:00 Uhr

Aufgabe 40: (Kondition des Eigenwert-Problems)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix mit genau einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Desweiteren habe die Jordan-Normalform von A die Blockdiagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & J_m \end{pmatrix}$$

mit Jordan-Blöcken $J_i \in \mathbb{K}^{\nu_i \times \nu_i}$, $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_m$.

- (a) Sei $\Delta J_i \in \mathbb{K}^{\nu_i \times \nu_i}$, und sei $\lambda(\varepsilon)$ ein Eigenwert der (gestörten) Matrix $J_i + \varepsilon \cdot \Delta J_i$. Beweisen Sie für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$|\lambda(\varepsilon) - \lambda| \leq K \cdot |\varepsilon^{1/\nu_i}|$$

mit einer Konstanten $K > 0$.

- (b) Zeigen Sie allgemeiner: sei $\Delta A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, und sei $\lambda(\varepsilon)$ ein Eigenwert der Matrix $A + \varepsilon \cdot \Delta A$, dann gilt für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$|\lambda(\varepsilon) - \lambda| \leq K' \cdot |\varepsilon^{1/\nu_i}|$$

mit einer Konstanten $K' > 0$.

HINWEIS ZU (a): Wenden Sie den Satz von Gerschgorin auf eine geeignete Skalierung $B := D_i \cdot (J_i + \varepsilon \Delta J_i) \cdot D_i^{-1}$ von $J_i + \varepsilon \Delta J_i$ mit Diagonalmatrizen $D_i \in \mathbb{K}^{\nu_i \times \nu_i}$ an.

HINWEIS ZU (b): Verfahren Sie analog für die Jordan-Normalform von $A + \varepsilon \Delta A$.

Aufgabe 41: (Potenzmethode)

- (a) Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Zeigen Sie, daß alle Eigenwerte von A reell sind und im Intervall $(0, 4]$ liegen. Folgern Sie, daß die Potenzmethode für jede Wahl des Startvektors $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gegen einen Eigenwert der Matrix A konvergiert.

(b) Gegeben sei die *zirkulante Shiftmatrix*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Wenden Sie die Potenzmethode auf den Startvektor $\mathbf{z}^{(0)} := \mathbf{e}_1$ an. Wie lautet die k -te Iterierte? Was läßt sich über das Konvergenzverhalten sagen? Wieso steht letzteres nicht im Widerspruch zu Satz 16.2 der Vorlesung?

Aufgabe 42: (*Givens-Rotationen, QR-Zerlegung und Eigenwerte*)

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sei eine hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Desweiteren sei $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A (d.h., $\overline{Q}^T = Q^{-1}$ und $R = (r_{i,j})$ obere Dreiecksmatrix).

(a) Zeigen Sie, daß es für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ eine unitäre Matrix (“*Givens Rotation*”) $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt, so daß $\tilde{R} := \overline{U}^T R U$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonale

$$(\tilde{r}_{1,1}, \tilde{r}_{2,2}, \dots, \tilde{r}_{n,n}) = (r_{j,j}, r_{1,1}, r_{2,2}, \dots, r_{i-1,i-1}, r_{i+1,i+1}, \dots, r_{n,n})$$

ist.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\min_i |\lambda_i| \leq |r_{j,j}| \leq \max_i |\lambda_i|$$

für alle $j = 1, \dots, n$.

HINWEIS ZU (a): Betrachten Sie zunächst den Fall $n = j = 2$.