Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013 - Übungsblatt 10

Abgabetermin: 28.6.2013, 10:00h

Alle Ringe sind kommutativ mit Eins und nicht der Nullring.

Aufgabe 1. Es sei R ein Ring und $x \in R$ mit $x^2 = x$. Zeigen Sie:

(a) Das von x erzeugte Ideal $\langle x \rangle$ ist ein Ring. Was ist das Einselement in $\langle x \rangle$?

(b) Die Abbildung $f : R \to \langle x \rangle, f(a) = ax$ ist ein Ringhomomorphismus.

(c) Der Ring $\langle x \rangle$ ist isomorph zu $R/\langle 1 - x \rangle$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ über einem Ring R genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \in R^*$.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe wollen wir mit Hilfe von Potenzreihen eine explizite Formel für die durch $a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Fibonacci-Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ herleiten.

(a) Das reelle Polynom $1 - ct$ für $c \in \mathbb{R}$ ist nach Aufgabe 2 im Potenzreihenring $\mathbb{R}[\![t]\!]$ invertierbar. Berechnen Sie sein Inverses $\frac{1}{1-ct}$.

(b) Auch $1 - t - t^2$ ist nach Aufgabe 2 in $\mathbb{R}[\![t]\!]$ invertierbar. Zeigen Sie, dass sich sein Inverses als $\frac{1}{1-t-t^2} = \frac{b_1}{1-c_1 t} + \frac{b_2}{1-c_2 t}$ für gewisse $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ schreiben lässt.

(c) Zeigen Sie, dass die Fibonacci-Zahlen genau die Koeffizienten der Potenzreihe $\frac{1}{1-t-t^2}$ sind, d.h. dass

$$\frac{1}{1 - t - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

gilt und folgern Sie daraus für $n \in \mathbb{N}$ die nicht-rekursive Formel

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$