TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013 - Übungsblatt 11

Abgabetermin: 5.7.2013, 10:00h

Alle Ringe sind kommutativ mit Eins und nicht der Nullring.

Aufgabe 1. Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

(a) Das *Nilradikal* $N_R := \{a \in R \mid a \text{ ist nilpotent}\}$ ist ein Ideal von R.

(b) Ist die Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in R[\![t]\!]$ nilpotent, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ der Koeffizient $a_n \in R$ nilpotent.

(c) Ein Polynom $f = \sum_{n=0}^{m} a_n t^n \in R[t]$ ist genau dann nilpotent, wenn für alle $n \in \{0, \dots, m\}$ der Koeffizient $a_n \in R$ nilpotent ist. Dies bedeutet, dass $N_{R[t]} = \langle N_R \rangle_{R[t]}$ ist.

Aufgabe 2. Für eine Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ über einem Ring R definieren wir die (formale) Ableitung als $f' := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$

(a) Man zeige: Für alle $f, g \in R[\![t]\!]$ gilt $(f+g)' = f' + g'$ und $(fg)' = f'g + fg'$.

(b) Bestimmen Sie in den beiden Fällen $R = \mathbb{R}$ und $R = \mathbb{Z}_7$ alle Potenzreihen mit Ableitung $0 \in R[\![t]\!]$.

Aufgabe 3. Man zeige:

(a) Sind $R \leq S$ Ringe und $x \in S$, so ist die "Auswerteabbildung“

$$\varphi_x : R[t] \to S, f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \mapsto f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

ein Ringhomomorphismus.

(b) Jedes Element des Ringes $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ lässt sich in der Form $\overline{a_1 t + a_0}$ mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ schreiben.

(c) Die Abbildung $\mathbb{R}[t]/(t^2+1) \to \mathbb{C}, f(t) \mapsto f(i)$ ist ein Ringisomorphismus.

(d) (3 Bonuspunkte) Seien R, S und x wie in Aufgabenteil (a). Ist x eine Nullstelle des Polynoms $g = t^n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0 \in R[t]$, so ist

$$\mathrm{Im}(\varphi_x) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in R\}.$$

Wir bezeichnen diesen Unterring von S mit $R[x] = \mathrm{Im}(\varphi_x)$.

(e) (1 Bonuspunkt) Geben Sie mit Hilfe von Teil (d) eine möglichst effiziente Darstellung für den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ an.