

Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013 - Übungsblatt 2

Abgabetermin: 3.5.2013, 9:00h

Aufgabe 1. Sei (G, \circ) eine endliche Gruppe mit neutralem Element e . Beweisen Sie:

- Für jedes $a \in G$ existiert ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $a^n = e$. Wir nennen das minimale Element $n_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ mit dieser Eigenschaft die *Ordnung* von a und schreiben $n_0 = \text{ord}(a)$.
- Zu je zwei Elementen $a, b \in G$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $a^n = b^n$.
- Für $a \in G$ mit $\text{ord}(a) = n$ gilt $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{a^1, a^2, \dots, a^n\}$.

Gelten die Aussagen auch für nicht-endliche Gruppen?

Aufgabe 2. Seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 8 & 5 & 9 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \in S_9$.

- Berechnen Sie σ^{-1} .
- Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.
- Schreiben Sie σ als Komposition von disjunkten Zykeln.
- Schreiben Sie σ als Komposition von Transpositionen.
- Bestimmen Sie σ^m für alle $m \in \mathbb{Z}$. Verallgemeinern Sie Ihr Resultat für $\pi \in S_n, n \in \mathbb{N}_{>0}$ indem Sie π als Komposition disjunkter Zykeln schreiben. Was können Sie insbesondere über die Ordnung von π aussagen?

Aufgabe 3. Ein Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ nennt man eine rationale 2×2 -Matrix. Wir bezeichnen die Menge solcher Matrizen mit $\text{Mat}_2(\mathbb{Q})$. Definieren Sie auf $\text{Mat}_2(\mathbb{Q})$ die Verknüpfung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \in \mathbb{Q}$$

die **Determinante** der Matrix und definieren

$$\text{GL}_2(\mathbb{Q}) = \{A \in \text{Mat}_2(\mathbb{Q}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Beweisen Sie:

- Für $A, B \in \text{Mat}_2(\mathbb{Q})$ gilt: $\det(A \circ B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- $(\text{GL}_2(\mathbb{Q}), \circ)$ ist eine nicht-abelsche Gruppe (die Assoziativität braucht nicht nachgerechnet werden).