Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013 - Übungsblatt 3

Abgabetermin: 10.5.2013, 9:00h

Aufgabe 1. Überprüfen Sie, ob folgende Teilmengen U Untergruppen der Gruppe G sind.

(a) G das Produkt von $(\mathbb{Z},+)$ und $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ und $U=\{(a,b)\in G \mid b=2^a\}$.

(b) $G=S_4$ und $U=\{\sigma\in S_4 \mid \sigma^2=(1)\}$.

(c) $G=S_4$ und $U=\{(1)\}\cup\{\sigma\in S_4 \mid \sigma \text{ ist eine Transposition}\}$.

(d) $G=(\mathbb{R},+)\times(\mathbb{R},+)$ und $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y=ax^2+bx+c\}$ für gegebene $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(e) $(G,\circ)$ eine beliebige Gruppe und

$$U=Z(G)=\{z\in G \mid z\circ g=g\circ z \text{ für alle } g\in G\}.$$

Aufgabe 2. Es seien $(G,\circ)$ eine Gruppe und $U_1,U_2\subset G$ Untergruppen. Man zeige:

(a) Für alle $a\in G$ ist $a\circ U_1\circ a^{-1}=\{a\circ u\circ a^{-1} \mid u\in U_1\}$ eine Untergruppe von G.

(b) Im Allgemeinen ist $U_1\circ U_2=\{a\circ b \mid a\in U_1, b\in U_2\}$ keine Untergruppe von G.

(c) Gilt jedoch $a\circ b\circ a^{-1}\in U_2$ für alle $a\in U_1$ und $b\in U_2$, so ist $U_1\circ U_2$ eine Untergruppe von G.

Aufgabe 3. (Die Diedergruppe D_{2n}) Für $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 3$ seien

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 2 & 3 & \cdots & 1\end{pmatrix} \text{ und } \sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ n & n-1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\in S_n.$$

Zeigen Sie:

(a) $\tau^n=\sigma^2=(1)$ und $\sigma\circ\tau=\tau^{-1}\circ\sigma$.

(b) $\sigma\circ\tau^k=\tau^{-k}\circ\sigma$ für alle $k\in\mathbb{N}$.

(c) Es gilt

$$\langle\tau,\sigma\rangle=\{\tau^k\circ\sigma^\ell \mid k=0,\dots,n-1,\ell=0,1\}$$

und diese Untergruppe von S_n, die sogenannte **Diedergruppe** D_{2n} (gesprochen: Di-eder-gruppe), besteht aus $2n$ Elementen.

Interpretieren Sie D_{2n} als Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks.