Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013 - Übungsblatt 4

Abgabetermin: 17.5.2013, 9:00h

Aufgabe 1. Sei $\phi : (G, *) \to (H, \circ)$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Ist $G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$, so ist ϕ bereits durch die Bilder $\phi(g_1), \dots, \phi(g_r)$ eindeutig bestimmt.

(b) Für $g \in G$ mit $\operatorname{ord}(g) < \infty$ gilt, dass $\operatorname{ord}(g)$ von $\operatorname{ord}(\phi(g))$ geteilt wird. Ist ϕ ein Isomorphismus, so gilt sogar $\operatorname{ord}(\phi(g)) = \operatorname{ord}(g)$.

(c) Nehmen Sie nun an, dass $G = \langle g \rangle$ mit $\operatorname{ord}(g) = n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Homomorphismen von G nach H.
Hinweis: Beachten Sie, dass gilt: $g^l = g^k$ für $k, l \in \mathbb{Z}$ genau dann wenn $l - k \in n\mathbb{Z}$. Insbesondere müssen Sie also darauf achten, dass die Homomorphismen g^k und g^l auf dasselbe Element in H abbilden falls $l - k \in n\mathbb{Z}$.

(d) Sei $G = H = \langle (1234) \rangle \subset S_4$. Bestimmen Sie alle Isomorphismen von G nach H.

Aufgabe 2. Sind die folgenden Gruppen G und H isomorph?

(a) $G = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ und $H = S_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

(b) $G = S_2 \times S_2$ und $H = \langle (1\,2\,3\,4) \rangle \subset S_4$;

(c) $G = (\mathbb{Q}, +)$ und $H = (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen f Homomorphismen sind und berechnen sie gegebenenfalls $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Im} f$:

(a) $f : (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(m, n) = 2m + 3n$;

(b) $f : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q}, +), f(x) = x$;

(c) $f : G \to G, f(a) = g \circ a \circ h$ für eine Gruppe $(G, \circ)$ und gegebene $g, h \in G$.