

## Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013 - Übungsblatt 5

Abgabetermin: 24.5.2013, 10:00 Uhr

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie das Signum aller Elemente der Diedergruppe  $D_{2n}$  (siehe Aufgabe 3, Blatt 3), wobei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ .

*Hinweis: Sollten Sie die Aufgabe in dieser allgemeinen Form nicht oder nur teilweise lösen können, dann können Sie die Aufgabe beziehungsweise die fehlenden Teile für den Spezialfall  $n = 5$  bearbeiten. Im Falle der korrekten Bearbeitung dieses Spezialfalles erhalten Sie mindestens einen Punkt auf diese Aufgabe.*

### Aufgabe 2.

(a) Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen  $M$  und  $N$ . Zeigen Sie: Durch  $m_1 \sim m_2 :\Leftrightarrow f(m_1) = f(m_2)$  wird eine Äquivalenzrelation auf  $M$  definiert (wir nennen diese Äquivalenzrelation *Bildgleichheits-Äquivalenzrelation bezüglich  $f$* .)

(b) Jede Äquivalenzrelation  $\sim'$  auf einer nicht-leeren Menge  $M'$  kann als Bildgleichheits-Äquivalenzrelation bezüglich einer geeigneten Abbildung  $g$  dargestellt werden.

*Hinweis: Die Zielmenge der Abbildung  $g$  muss natürlich von  $M'$  und  $\sim'$  abhängen. Sie kennen eine solche Menge bereits aus der Vorlesung.*

**Aufgabe 3.** Es seien  $U$  und  $V$  zwei Untergruppen einer endlichen Gruppe  $G$ . Zeigen Sie:

(a) Durch

$$(u, v) \sim (u', v') :\Leftrightarrow u \circ v = u' \circ v'$$

wird eine Äquivalenzrelation auf  $U \times V$  definiert.

(b) Die Äquivalenzklasse von  $(u, v) \in U \times V$  ist

$$\overline{(u, v)} = \{(u \circ a, a^{-1} \circ v) \mid a \in U \cap V\}$$

und besitzt genau  $|U \cap V|$  Elemente.

(c) Es gilt die **Produktformel** für Untergruppen

$$|UV| = \frac{|U| \cdot |V|}{|U \cap V|},$$

wobei  $UV = \{u \circ v \mid u \in U, v \in V\}$ .