TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013 - Übungsblatt 6

Abgabetermin: 31.5.2013, 10:00h

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe, $a, b \in G$ und $f_a : \mathbb{Z} \to G, k \mapsto a^k$. Zeigen Sie:

(a) Ist die Ordnung von a endlich, so gilt: $\operatorname{ord}(a) = n \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f_a) = n\mathbb{Z}$.

(b) Die Ordnung von a ist genau dann unendlich wenn $\operatorname{Ker}(f_a) = \{0\}$ ist.

(c) $\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(a^{-1})$

(d) $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(ba)$

Aufgabe 2.

(a) Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen wohldefiniert sind:

(i) $f_1 : \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \bar{a} \mapsto \bar{a}$

(ii) $f_2 : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \bar{a} \mapsto \bar{a}$

(iii) $f_3 : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \bar{a} \mapsto \bar{a}$

(b) Für welche $m, n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \bar{a} \mapsto \bar{a}$ wohldefinert?

Hinweis: Aufgabenteil (a) soll Ihnen helfen ein geeignetes Kriterium für die Wohldefiniertheit in Teil (b) aufzustellen. Natürlich reicht es dieses Kriterium in Teil (b) zu beweisen und dann daraus zu folgern, welche der Abbildungen in Teil (a) wohldefiniert sind.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe $D_{10} = \langle \sigma, \tau \rangle \leq S_5$, wobei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.