TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013 - Übungsblatt 7

Abgabetermin: 7.6.2013, 10:00h

Aufgabe 1. Welche der folgenden Teilmengen $U \subset G$ sind Normalteiler?

(a) $G = \mathbb{Z}, U = \{1, -1\}$;

(b) $G = S_n, U = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = 1\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$;

(c) G eine beliebige Gruppe, $U = \varphi^{-1}(N)$ für einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ und N ein Normalteiler von H;

(d) G eine Gruppe mit $|G| = 24, U = \langle a, b\rangle$ für gewisse $a, b \in G$ mit ord $a = 4$ und ord $b = 3$.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler in G. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \{U \mid U \text{ ist eine Untergruppe von } G \text{ mit } U \supset N\} &\to \{V \mid V \text{ ist eine Untergruppe von } G/N\} \\ U &\mapsto U/N \end{aligned}$$

bijektiv ist. D.h. die Untergruppen einer Faktorgruppe G/N entsprechen den Untergruppen von G, die N enthalten.

Aufgabe 3.

(a) Sei G eine Gruppe, $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Zeigen Sie:

$$UN/N \cong U/U \cap N.$$

Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass UN/N und $U/U \cap N$ in der Tat Faktorgruppen sind.

(b) *Bonusaufgabe: 5 Extrapunkte*
Betrachten Sie die Diedergruppe $D_{2n} = \langle \sigma, \tau\rangle$ (mit $n > 2$), wobei

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in S_n.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\langle \sigma \rangle$ kein Normalteiler von D_{2n} ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\langle \tau \rangle$ ein Normalteiler von D_{2n} ist indem Sie die Konjugationen von $\langle \tau \rangle$ berechnen. Geben Sie zwei weitere Beweismöglichkeiten an.
Hinweis: Auf Aufgabenblatt 3 haben Sie in Aufgabe 3(b) gezeigt, dass $\sigma \circ \tau = \tau^{-1} \circ \sigma$ gilt. Schreiben Sie diese Gleichung um als $\tau^\sigma = \tau^{-1}$, wobei $\tau^\sigma := \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ die Konjugation mit σ bezeichne. Sie wissen bereits aus den Übungen, dass Konjugationen Gruppenhomomorphismen definieren. Nutzen Sie diese Eigenschaft um zu zeigen, dass $\rho^\sigma \in \langle \tau \rangle$ für alle $\rho \in \langle \tau \rangle$. Folgern Sie nun mit Hilfe der Darstellung $D_{2n} = \{\tau^k \circ \sigma^\ell \mid k = 0, \ldots, n-1, \ell = 0, 1\}$, dass $\rho^\pi \in \langle \tau \rangle$ für alle $\rho \in \langle \tau \rangle$, $\pi \in \langle \sigma \rangle$.

(iii) Beweisen Sie: $D_{2n}/\langle \tau \rangle \cong \langle \sigma \rangle$