Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013 - Übungsblatt 8

Abgabetermin: 14.6.2013, 10:00h

Alle Ringe sind kommutativ mit Eins.

Aufgabe 1.

(a) Seien G und H zwei endliche Gruppen mit teilerfremden Ordnungen, d.h. 1 ist die einzige Zahl in $\mathbb{N}$ die gleichzeitig $|G|$ und $|H|$ teilt. Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes, dass es nur einen Homomorphismus von G nach H gibt.

(b) Bestimmen Sie alle Homomorphismen von $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, +)$ sowie von $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie (z.B. mit Hilfe von Aufgabe 2 auf Blatt 7) alle Untergruppen der zyklischen Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ für $n > 0$.

(b) Zeigen Sie: Ist G eine endliche zyklische Gruppe und n ein Teiler der Ordnung von G, so gibt es genau eine Untergruppe von G der Ordnung n, und diese ist ebenfalls zyklisch.

Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie alle Einheiten in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\overline{n-1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}_{>1} := \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\}$ eine Einheit ist.

(c) Berechnen Sie $\overline{5^{12345}}$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(d) Es sei $a \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a alle $x, y \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, die das Gleichungssystem

$$\overline{5}x + \overline{6}y = \overline{4} \quad (1)$$
$$\text{und } \overline{8}x + \overline{9}y = a \quad (2)$$

in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ erfüllen.

Aufgabe 4 ist eine Bonusaufgabe, bei der 4 Extrapunkte erreicht werden können.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $a \in R$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\varphi_a : R \to R, r \mapsto a \cdot r$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Falls R endlich ist, so ist jedes von 0 verschiedene Element in R entweder eine Einheit oder ein Nullteiler. Gilt diese Aussage auch für unendliche Ringe?