TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Algebraische Strukturen

Sommersemester 2013 - Übungsblatt 9

Abgabetermin: 21.6.2013, 10:00h

Alle Ringe sind kommutativ mit Eins und nicht der Nullring.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ und von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Es sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a^2 \in \mathbb{Z}$. Wir definieren

$$\mathbb{Z}[a] := \{m + na \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[a]$ ein Ring ist.

(b) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$.

(c) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

Hinweis zu (2),(3): Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{Z}[a]$ betrachte man das Betragsquadrat $|z|^2$. Aus den Grundlagen der Mathematik dürfen Sie verwenden, dass $|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 3. Ist I ein Ideal in einem Ring R, so heißt $\sqrt{I} := \{a \in R \mid a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ das Radikal von I.

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ wieder ein Ideal von R ist.

(b) Man zeige: Ist $a \in \sqrt{\{0\}}$, so ist $1 + a$ eine Einheit in R.

(c) Berechnen Sie das Ideal $\sqrt{180\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 ist eine Bonusaufgabe (4 Extrapunkte)

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : K \to R$ ein Ringhomomorphismus von einem Körper K in einen Ring R, so ist f injektiv.

(b) Von den drei Ringen $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind keine zwei isomorph zueinander.