Diophantische Gleichungen

Technische Universität Kaiserslautern

Einführung in Diophantische Gleichungen

Definition

Es sei $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann heißt

$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

Diophantische Gleichung mit Lösungen x_i in $\mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$).

Einführung in Diophantische Gleichungen

Definition

Es sei $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann heißt

$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

Diophantische Gleichung mit Lösungen x_i in $\mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$).

Beispiel

Sei $f(x,y) = 3x - 2y$. Wir wollen $3x - 2y = 0$ ganzzahlig lösen.

Einführung in Diophantische Gleichungen

Definition
Es sei $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann heißt

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Diophantische Gleichung mit Lösungen x_i in $\mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$).

Beispiel
Sei $f(x, y) = 3x - 2y$. Wir wollen $3x - 2y = 0$ ganzzahlig lösen.

- Eine Lösung wäre $x = 2, y = 3$.

Einführung in Diophantische Gleichungen

Definition
Es sei $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann heißt

$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

Diophantische Gleichung mit Lösungen x_i in $\mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$).

Beispiel
Sei $f(x,y) = 3x - 2y$. Wir wollen $3x - 2y = 0$ ganzzahlig lösen.

- Eine Lösung wäre $x = 2, y = 3$.
- Ebenso alle Vielfachen davon: $\mathbb{L} = \{(2k, 3k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^2$.

Lösbarkeit von DGs

Beispiel 1

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{29}$$

Lösbarkeit von DGs

Beispiel 1

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{29}$$

$(3, 1, 1)$ und $(4, -3, -2)$
einfach zu finden
schwer zu zeigen, dass es keine weiteren gibt

Lösbarkeit von DGs

Beispiel 1

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{29}$$

$(3, 1, 1)$ und $(4, -3, -2)$
einfach zu finden
schwer zu zeigen, dass es keine weiteren gibt

Beispiel 2

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{30}$$

Lösbarkeit von DGs

Beispiel 1

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{29}$$

$(3, 1, 1)$ und $(4, -3, -2)$
einfach zu finden
schwer zu zeigen, dass es keine weiteren gibt

Beispiel 2

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{30}$$

$(2220422932, -2218888517, -283059965)$
"einfach" zu finden
schwer zu zeigen, dass es keine weiteren gibt

Lösbarkeit von DGs II

Beispiel 3

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{31}$$

Lösbarkeit von DGs II

Beispiel 3

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{31}$$

keine Lösung!

$$x^3 \equiv -1, 0, 1 \bmod 9$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \equiv -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \bmod 9$$

aber $31 \equiv 4 \bmod 9$.

Lösbarkeit von DGs II

Beispiel 3

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{31}$$

keine Lösung!

$x^3 \equiv -1, 0, 1 \bmod 9$

$x^3 + y^3 + z^3 \equiv -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \bmod 9$

aber $31 \equiv 4 \bmod 9$.

Beispiel 4

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{32}$$

Lösbarkeit von DGs II

Beispiel 3

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{31}$$

keine Lösung!

$x^3 \equiv -1, 0, 1 \bmod 9$

$x^3 + y^3 + z^3 \equiv -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \bmod 9$

aber $31 \equiv 4 \bmod 9$.

Beispiel 4

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{32}$$

keine Lösung!

entsprechend Beispiel 3 gilt $32 \equiv 5 \bmod 9$.

Lösbarkeit von DGs III

Beispiel 3

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{33}$$

Lösbarkeit von DGs III

Beispiel 3

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{33}$$

unbekannt

KEIN SCHERZ!

Lösbarkeit von DGs III

Beispiel 3

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{33}$$

unbekannt

KEIN SCHERZ!

Wir halten fest

Lösbarkeit von DGs unentscheidbar (Hilbert was wrong!), es gibt keinen allgemeinen Algorithmus zum Lösen von DGs.

Lösbarkeit von DGs III

Beispiel 3

$$x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{33}$$

unbekannt

KEIN SCHERZ!

Wir halten fest

Lösbarkeit von DGs unentscheidbar (Hilbert was wrong!), es gibt keinen allgemeinen Algorithmus zum Lösen von DGs.

Einige Forschung auf dem Gebiet $\Longrightarrow$ viele nette Tricks!

Faktorisierungsmethode

Beispiel (China)
Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$6xy + 4x - 9y - 7 = 0.$$

Faktorisierungsmethode

Beispiel (China)
Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$6xy + 4x - 9y - 7 = 0.$$

$$6xy + 4x - 9y - 6 \quad = \quad 1$$

Faktorisierungsmethode

Beispiel (China)

Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$6xy + 4x - 9y - 7 = 0.$$

$$\begin{aligned} 6xy + 4x - 9y - 6 &= 1 \\ (2x-3)(3y+2) &= 1 \end{aligned}$$

Faktorisierungsmethode

Beispiel (China)
Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$6xy + 4x - 9y - 7 = 0.$$

$$\begin{aligned} 6xy + 4x - 9y - 6 &= 1 \\ (2x-3)(3y+2) &= 1 \end{aligned}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. $2x - 3 = 1$ und $3y - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \in \mathbb{Z}, \quad y = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$

Faktorisierungsmethode

Beispiel (China)
Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$6xy + 4x - 9y - 7 = 0.$$

$$\begin{aligned} 6xy + 4x - 9y - 6 &= 1 \\ (2x-3)(3y+2) &= 1 \end{aligned}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

$$\begin{array}{llllll} 1. & 2x - 3 = 1 & \text{und} & 3y - 2 = 1 & \Rightarrow & x = 2 \in \mathbb{Z}, \quad y = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \\ 2. & 2x - 3 = -1 & \text{und} & 3y - 2 = -1 & \Rightarrow & x = 1 \in \mathbb{Z}, \quad y = -1 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{L} = \{(1, -1)\}}$$

Faktorisierungsmethode II

Allgemeine Idee

1. Bringe DG durch einfache Umformung / Ergänzung auf die Form Produkt einfacher Terme = ganze Zahl.

2. Faktorisiere linke Seite in (meistens lineare) Terme und löse einfachere DG Systeme per Fallunterscheidung.

Faktorisierungsmethode III

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2.$$

Faktorisierungsmethode III

Beispiel (Indien)
Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2.$$

$$x^2y^2 - 14xy + 49 \quad = \quad x^2 + y^2 \quad \mid +2xy$$

Faktorisierungsmethode III

Beispiel (Indien)
Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von

$$(xy-7)^2 = x^2+y^2.$$

$$\begin{aligned} x^2y^2-14xy+49 &= x^2+y^2 \quad |+2xy \\ x^2y^2-12xy+49 &= x^2+2xy+y^2 \end{aligned}$$

Faktorisierungsmethode III

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von

$$(xy-7)^2 = x^2+y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2y^2-14xy+49 &= x^2+y^2 \quad |+2xy \\
x^2y^2-12xy+49 &= x^2+2xy+y^2 \\
x^2y^2-12xy+36+13 &= x^2+2xy+y^2
\end{aligned}$$

Faktorisierungsmethode III

Beispiel (Indien)
Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von

$$(xy-7)^2 = x^2+y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2y^2-14xy+49 &= x^2+y^2 \quad |+2xy \\
x^2y^2-12xy+49 &= x^2+2xy+y^2 \\
x^2y^2-12xy+36+13 &= x^2+2xy+y^2 \\
(xy-6)^2+13 &= (x+y)^2
\end{aligned}$$

Faktorisierungsmethode III

Beispiel (Indien)
Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von

$$(xy-7)^2 = x^2+y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2y^2-14xy+49 &= x^2+y^2 \quad |+2xy \\
x^2y^2-12xy+49 &= x^2+2xy+y^2 \\
x^2y^2-12xy+36+13 &= x^2+2xy+y^2 \\
(xy-6)^2+13 &= (x+y)^2 \\
(xy-6)^2-(x+y)^2 &= -13 \quad | \text{ 3. Bin. Formel links}
\end{aligned}$$

Faktorisierungsmethode III

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von

$$(xy-7)^2 = x^2+y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2y^2-14xy+49 &= x^2+y^2 \quad \mid +2xy \\
x^2y^2-12xy+49 &= x^2+2xy+y^2 \\
x^2y^2-12xy+36+13 &= x^2+2xy+y^2 \\
(xy-6)^2+13 &= (x+y)^2 \\
(xy-6)^2-(x+y)^2 &= -13 \quad \mid \text{3. Bin. Formel links} \\
(xy-6+(x+y))(xy-6-(x+y)) &= -13
\end{aligned}$$

Faktorisierungsmethode III

Beispiel (Indien)
Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2y^2 - 14xy + 49 &= x^2 + y^2 \quad \mid +2xy \\
x^2y^2 - 12xy + 49 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
x^2y^2 - 12xy + 36 + 13 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(xy-6)^2 + 13 &= (x+y)^2 \\
(xy-6)^2 - (x+y)^2 &= -13 \quad \mid \text{3. Bin. Formel links} \\
(xy - 6 + (x+y))(xy - 6 - (x+y)) &= -13
\end{aligned}$$

13 ist eine Primzahl, also kommen nur 4 Fälle in Frage:

Faktorisierungsmethode IV

1. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\ (xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$

   Das ist eine mögliche Lösung.

Faktorisierungsmethode IV

1. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\(xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$

   Das ist eine mögliche Lösung.

2. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= 1\\(xy-6+(x+y)) &= -13\end{aligned}$$

   $x \geq 0, y \geq 0 \;\Rightarrow$ **Widerspruch!**

Faktorisierungsmethode IV

1. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\ (xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$

   Das ist eine mögliche Lösung.

2. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= 1\\ (xy-6+(x+y)) &= -13\end{aligned}$$

   $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow$ **Widerspruch!**

3. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -13\\ (xy-6+(x+y)) &= 1\end{aligned}$$

   Das ist eine mögliche Lösung.

Faktorisierungsmethode IV

1. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\ (xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$

Das ist eine mögliche Lösung.

2. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= 1\\ (xy-6+(x+y)) &= -13\end{aligned}$$

$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow$ **Widerspruch!**

3. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -13\\ (xy-6+(x+y)) &= 1\end{aligned}$$

Das ist eine mögliche Lösung.

4. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= 13\\ (xy-6+(x+y)) &= -1\end{aligned}$$

$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow$ **Widerspruch!**

Faktorisierungsmethode V

1. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\(xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$

Faktorisierungsmethode V

1. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\(xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$

Somit folgt $$\begin{aligned}x+y &= 7\\xy &= 12\end{aligned}$$

Also sind $(3,4)$ und $(4,3)$ Lösungspaare.

Faktorisierungsmethode V

1.
$$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\ (xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$

Somit folgt $\begin{aligned}x+y &= 7\\ xy &= 12\end{aligned}$

Also sind $(3,4)$ und $(4,3)$ Lösungspaare.

3.
$$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -13\\ (xy-6+(x+y)) &= 1\end{aligned}$$

Faktorisierungsmethode V

1. $$\begin{aligned} (xy-6-(x+y)) &= -1 \\ (xy-6+(x+y)) &= 13 \end{aligned}$$

Somit folgt $$\begin{aligned} x+y &= 7 \\ xy &= 12 \end{aligned}$$

Also sind $(3,4)$ und $(4,3)$ Lösungspaare.

3. $$\begin{aligned} (xy-6-(x+y)) &= -13 \\ (xy-6+(x+y)) &= 1 \end{aligned}$$

Somit folgt $$\begin{aligned} x+y &= 7 \\ xy &= 0 \end{aligned}$$

Also sind $(0,7)$ und $(7,0)$ Lösungspaare.

Faktorisierungsmethode V

1.
$$\begin{aligned} (xy-6-(x+y)) &= -1 \\ (xy-6+(x+y)) &= 13 \end{aligned}$$

Somit folgt
$$\begin{aligned} x+y &= 7 \\ xy &= 12 \end{aligned}$$

Also sind $(3,4)$ und $(4,3)$ Lösungspaare.

3.
$$\begin{aligned} (xy-6-(x+y)) &= -13 \\ (xy-6+(x+y)) &= 1 \end{aligned}$$

Somit folgt
$$\begin{aligned} x+y &= 7 \\ xy &= 0 \end{aligned}$$

Also sind $(0,7)$ und $(7,0)$ Lösungspaare.

$$\mathbb{L} = \{(0,7),(3,4),(4,3),(7,0)\}$$

Ungleichungen nutzen I

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

Ungleichungen nutzen I

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

$$x^2 - x + y^2 - y - xy \quad = \quad 0$$

Ungleichungen nutzen I

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad | + 1 \end{aligned}$$

Ungleichungen nutzen I

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad | + 1 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 1
\end{aligned}$$

Ungleichungen nutzen I

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad | + 1 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 1 \\
\left(\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2\right) &= 1 \quad | \cdot 2
\end{aligned}$$

Ungleichungen nutzen I

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad |+1 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 1 \\
(\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2) &= 1 \quad |\cdot 2 \\
(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) &= 2
\end{aligned}$$

Ungleichungen nutzen I

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad \mid +1 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 1 \\
\left(\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2\right) &= 1 \quad \mid \cdot 2 \\
(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) &= 2 \\
(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 &= 2
\end{aligned}$$

Ungleichungen nutzen I

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad \mid +1 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 1 \\
\left(\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2\right) &= 1 \quad \mid \cdot 2 \\
(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) &= 2 \\
(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 &= 2
\end{aligned}$$

Da x und y ganzzahlig sind, muss gelten

$(x-1)^2 \leq 1$ und $(y-1)^2 \leq 1$, also $x, y \in \{0, 1, 2\}$.

Ungleichungen nutzen I

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von

$$x+y=x^2-xy+y^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2-x+y^2-y-xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2-x+\tfrac{1}{2}y^2-y+\tfrac{1}{2}x^2-xy+\tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad |+1 \\
\tfrac{1}{2}x^2-x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}y^2-y+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x^2-xy+\tfrac{1}{2}y^2 &= 1 \\
(\tfrac{1}{2}x^2-x+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}y^2-y+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}x^2-xy+\tfrac{1}{2}y^2) &= 1 \quad |\cdot 2 \\
(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2) &= 2 \\
(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2 &= 2
\end{aligned}$$

Da x und y ganzzahlig sind, muss gelten

$(x-1)^2 \leq 1$ und $(y-1)^2 \leq 1$, also $x, y \in \{0,1,2\}$.

$$\boxed{\mathbb{L}=\{(0,1),(1,0),(1,2),(2,1),(2,2)\}}$$

Ungleichungen nutzen II

Allgemeine Idee

1. Bringe DG durch einfache Umformung / Ergänzung auf die Form Produkt einfacher Terme = ganze Zahl.
2. Schränke somit die Intervalle, in denen die Variablen Werte einnehmen können durch passende Ungleichungen ein.
3. Erhalte somit (endlich viele) Lösungen.

Ungleichungen nutzen III

Beispiel (Rumänien)

Finde alle positiven ganzzahligen Lösungen von

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}.$$

Ungleichungen nutzen III

Beispiel (Rumänien)
Finde alle positiven ganzzahligen Lösungen von

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}.$$

DG besitzt Symmetrie bzgl. x, y und z. Können uns zum Finden von Lösungen zunächst auf den Fall

$$2 \leq x \leq y \leq z$$

einschränken.

Ungleichungen nutzen III

Beispiel (Rumänien)
Finde alle positiven ganzzahligen Lösungen von

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}.$$

DG besitzt Symmetrie bzgl. x, y und z. Können uns zum Finden von Lösungen zunächst auf den Fall

$$2 \leq x \leq y \leq z$$

einschränken. Dann gilt auch $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5}$.

Ungleichungen nutzen III

Beispiel (Rumänien)
Finde alle positiven ganzzahligen Lösungen von

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}.$$

DG besitzt Symmetrie bzgl. x, y und z. Können uns zum Finden von Lösungen zunächst auf den Fall

$$2 \leq x \leq y \leq z$$

einschränken. Dann gilt auch $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5}$. Also insgesamt

$$2 \leq x \leq 5.$$

Ungleichungen nutzen III

Beispiel (Rumänien)
Finde alle positiven ganzzahligen Lösungen von

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}.$$

DG besitzt Symmetrie bzgl. x, y und z. Können uns zum Finden von Lösungen zunächst auf den Fall

$$2 \leq x \leq y \leq z$$

einschränken. Dann gilt auch $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5}$. Also insgesamt

$$2 \leq x \leq 5.$$

Betrachte nun alle möglichen Fälle für x getrennt:

Ungleichungen nutzen III

Für $x = 2$ erhalten wir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad = \quad \frac{3}{5}$$

Ungleichungen nutzen III

Für $x = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{3}{5} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Ungleichungen nutzen III

Für $x = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{3}{5} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Da $y \leq z$ folgt $11 \leq y \leq 20$. Weiteres umformen obiger Gleichung ergibt

$$z = \frac{10y}{y - 10}.$$

Da z ganzzahlig sein muss können wir y einschränken auf

$$y \in \{11, 12, 14, 15, 20\}.$$

Ungleichungen nutzen III

Für $x = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{3}{5}\\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Da $y \leq z$ folgt $11 \leq y \leq 20$. Weiteres umformen obiger Gleichung ergibt

$$z = \frac{10y}{y - 10}.$$

Da z ganzzahlig sein muss können wir y einschränken auf

$$y \in \{11, 12, 14, 15, 20\}.$$

Und jetzt hilft nur noch $x = 2$ und entsprechende y Werte einsetzen und zugehöriges z berechnen:

$$\mathbb{L} = \{(2, 11, 110), (2, 12, 60), (2, 14, 35), (2, 15, 30), (2, 20, 20)\}$$

Ungleichungen nutzen IV

Für $x = 3$ ...
Für $x = 4$ ...
Für $x = 5$ ...

Ungleichungen nutzen IV

Für $x = 3 \dots$
Für $x = 4 \dots$
Für $x = 5 \dots$

Achtung:
Da unsere DG komplett symmetrisch in x, y und z ist sind auch alle Permutationen von $\mathbb{L}$ Lösungen, also z.B. $(2, 11, 110) \in \mathbb{L}$, somit auch

$$(2, 110, 11), (11, 2, 110), (11, 110, 2), (110, 2, 11), (110, 11, 2) \in \mathbb{L}.$$