DIOPHANTISCHE GLEICHUNGEN

Definition

Es sei $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann heißt

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Diophantische Gleichung mit Lösungen x_i in $\mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$).

Definition

Es sei $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann heißt

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Diophantische Gleichung mit Lösungen x_i in $\mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$).

Beispiel

Sei $f(x, y) = 3x - 2y$. Wir wollen $3x - 2y = 0$ ganzzahlig lösen.

Definition

Es sei $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann heißt

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Diophantische Gleichung mit Lösungen x_i in $\mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$).

Beispiel

Sei $f(x, y) = 3x - 2y$. Wir wollen $3x - 2y = 0$ ganzzahlig lösen.

- Eine Lösung wäre $x = 2, y = 3$.

Definition

Es sei $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann heißt

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Diophantische Gleichung mit Lösungen x_i in $\mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Q}$).

Beispiel

Sei $f(x, y) = 3x - 2y$. Wir wollen $3x - 2y = 0$ ganzzahlig lösen.

- Eine Lösung wäre $x = 2, y = 3$.
- Ebenso alle Vielfachen davon: $\mathbb{L} = \{(2k, 3k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^2$.

Beispiel 1

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 29$ gilt.

Beispiel 1

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 29$ gilt.

$(3, 1, 1)$ und $(4, -3, -2)$
einfach zu finden
schwer zu zeigen, dass es keine weiteren gibt

Beispiel 1

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 29$ gilt.

$(3, 1, 1)$ und $(4, -3, -2)$
einfach zu finden
schwer zu zeigen, dass es keine weiteren gibt

Beispiel 2

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 30$ gilt.

Beispiel 1

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 29$ gilt.

$(3, 1, 1)$ und $(4, -3, -2)$
einfach zu finden
schwer zu zeigen, dass es keine weiteren gibt

Beispiel 2

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 30$ gilt.

$(2220422932, -2218888517, -283059965)$
"einfach" zu finden
schwer zu zeigen, dass es keine weiteren gibt

Beispiel 3

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 31$ gilt.

Beispiel 3

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 31$ gilt.

keine Lösung!

$$x^3 \equiv -1, 0, 1 \bmod 9$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \equiv -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \bmod 9$$

aber $31 \equiv 4 \bmod 9$.

Beispiel 3

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 31$ gilt.

keine Lösung!

$$x^3 \equiv -1, 0, 1 \bmod 9$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \equiv -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \bmod 9$$

aber $31 \equiv 4 \bmod 9$.

Beispiel 4

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 32$ gilt.

Beispiel 3

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{31}$ gilt.

keine Lösung!

$x^3 \equiv -1, 0, 1 \bmod 9$

$x^3 + y^3 + z^3 \equiv -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \bmod 9$

aber $31 \equiv 4 \bmod 9$.

Beispiel 4

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = \mathbf{32}$ gilt.

keine Lösung!

entsprechend Beispiel 3 gilt $32 \equiv 5 \bmod 9$.

Beispiel 5

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 33$ gilt.

Beispiel 5

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 33$ gilt.

unbekannt

KEIN SCHERZ!

Beispiel 5

Finde alle ganzzahligen x, y, z, so dass $x^3 + y^3 + z^3 = 33$ gilt.

unbekannt

KEIN SCHERZ!

Wir halten fest

Lösbarkeit von DGs unentscheidbar (Hilbert was wrong!), es gibt keinen allgemeinen Algorithmus zum Lösen von DGs.

Einige Forschung auf dem Gebiet $\Longrightarrow$ viele nette Tricks!

Beispiel (China)

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $6xy + 4x - 9y - 7 = 0$.

Beispiel (China)

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $6xy + 4x - 9y - 7 = 0$.

$$6xy + 4x - 9y - 6 = 1$$

Beispiel (China)

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $6xy + 4x - 9y - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} 6xy + 4x - 9y - 6 &= 1 \\ (2x-3)(3y+2) &= 1 \end{aligned}$$

Beispiel (China)

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $6xy + 4x - 9y - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} 6xy + 4x - 9y - 6 &= 1 \\ (2x-3)(3y+2) &= 1 \end{aligned}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. $2x - 3 = 1$ und $3y + 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \in \mathbb{Z}, \quad y = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$

Beispiel (China)

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $6xy + 4x - 9y - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} 6xy + 4x - 9y - 6 &= 1 \\ (2x-3)(3y+2) &= 1 \end{aligned}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. $2x - 3 = 1$ und $3y + 2 = 1$ $\Rightarrow$ $x = 2 \in \mathbb{Z}$, $y = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$
2. $2x - 3 = -1$ und $3y + 2 = -1$ $\Rightarrow$ $x = 1 \in \mathbb{Z}$, $y = -1 \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathbb{L} = \{(1, -1)\}}$$

Allgemeine Idee

1. Bringe DG durch einfache Umformung / Ergänzung auf die Form
   Produkt einfacher Terme = ganze Zahl.

2. Faktorisiere linke Seite in (meistens lineare) Terme und löse einfachere DG Systeme per Fallunterscheidung.

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von
$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$.

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von $(xy-7)^2 = x^2 + y^2$.

$$x^2y^2 - 14xy + 49 \quad = \quad x^2 + y^2 \quad | + 2xy$$

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von $(xy-7)^2 = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned} x^2y^2 - 14xy + 49 &= x^2 + y^2 \quad \mid +2xy \\ x^2y^2 - 12xy + 49 &= x^2 + 2xy + y^2 \end{aligned}$$

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von $(xy-7)^2 = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned} x^2y^2 - 14xy + 49 &= x^2 + y^2 \quad | + 2xy \\ x^2y^2 - 12xy + 49 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2y^2 - 12xy + 36 + 13 &= x^2 + 2xy + y^2 \end{aligned}$$

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von
$(xy-7)^2 = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned} x^2y^2 - 14xy + 49 &= x^2 + y^2 \quad \mid +2xy \\ x^2y^2 - 12xy + 49 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2y^2 - 12xy + 36 + 13 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (xy-6)^2 + 13 &= (x+y)^2 \end{aligned}$$

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von $(xy-7)^2 = x^2+y^2$.

$$\begin{aligned}
x^2y^2 - 14xy + 49 &= x^2 + y^2 \quad | + 2xy \\
x^2y^2 - 12xy + 49 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
x^2y^2 - 12xy + 36 + 13 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(xy-6)^2 + 13 &= (x+y)^2 \\
(xy-6)^2 - (x+y)^2 &= -13 \quad | \text{ 3. Bin. Formel links}
\end{aligned}$$

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von
$(xy-7)^2 = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned}
x^2y^2 - 14xy + 49 &= x^2 + y^2 \quad \mid +2xy \\
x^2y^2 - 12xy + 49 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
x^2y^2 - 12xy + 36 + 13 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(xy-6)^2 + 13 &= (x+y)^2 \\
(xy-6)^2 - (x+y)^2 &= -13 \quad \mid \text{3. Bin. Formel links} \\
(xy - 6 + (x+y))\,(xy - 6 - (x+y)) &= -13
\end{aligned}$$

Beispiel (Indien)

Finde alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen von $(xy-7)^2 = x^2+y^2$.

$$\begin{aligned}
x^2y^2 - 14xy + 49 &= x^2 + y^2 \quad \mid +2xy \\
x^2y^2 - 12xy + 49 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
x^2y^2 - 12xy + 36 + 13 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(xy-6)^2 + 13 &= (x+y)^2 \\
(xy-6)^2 - (x+y)^2 &= -13 \quad \mid \text{3. Bin. Formel links} \\
(xy - 6 + (x+y))\,(xy - 6 - (x+y)) &= -13
\end{aligned}$$

13 ist eine Primzahl, also kommen nur 4 Fälle in Frage:

$$\begin{aligned} 1. \quad (xy - 6 - (x + y)) &= -1 \\ (xy - 6 + (x + y)) &= 13 \end{aligned}$$

Das ist eine mögliche Lösung.

1. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\ (xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$
Das ist eine mögliche Lösung.

2. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= 1\\ (xy-6+(x+y)) &= -13\end{aligned}$$
$x \geq 0, y \geq 0 \;\Rightarrow$ Widerspruch!

1. $$\begin{aligned}(xy - 6 - (x + y)) &= -1\\(xy - 6 + (x + y)) &= 13\end{aligned}$$
Das ist eine mögliche Lösung.

2. $$\begin{aligned}(xy - 6 - (x + y)) &= 1\\(xy - 6 + (x + y)) &= -13\end{aligned}$$
$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow$ Widerspruch!

3. $$\begin{aligned}(xy - 6 - (x + y)) &= -13\\(xy - 6 + (x + y)) &= 1\end{aligned}$$
Das ist eine mögliche Lösung.

FAKTORISIERUNGSMETHODE IV

1. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\(xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$
   Das ist eine mögliche Lösung.

2. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= 1\\(xy-6+(x+y)) &= -13\end{aligned}$$
   $x \geq 0, y \geq 0 \;\Rightarrow\;$ **Widerspruch!**

3. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -13\\(xy-6+(x+y)) &= 1\end{aligned}$$
   Das ist eine mögliche Lösung.

4. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= 13\\(xy-6+(x+y)) &= -1\end{aligned}$$
   $x \geq 0, y \geq 0 \;\Rightarrow\;$ **Widerspruch!**

1. $$\begin{aligned} (xy - 6 - (x + y)) &= -1 \\ (xy - 6 + (x + y)) &= 13 \end{aligned}$$

1. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\ (xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$

Somit folgt $$\begin{aligned}x+y &= 7\\ xy &= 12\end{aligned}$$

Also sind $(3,4)$ und $(4,3)$ Lösungspaare.

$$1.\quad \begin{aligned} (xy - 6 - (x+y)) &= -1 \\ (xy - 6 + (x+y)) &= 13 \end{aligned}$$

$$\text{Somit folgt} \quad \begin{aligned} x + y &= 7 \\ xy &= 12 \end{aligned}$$

Also sind $(3, 4)$ und $(4, 3)$ Lösungspaare.

$$3.\quad \begin{aligned} (xy - 6 - (x+y)) &= -13 \\ (xy - 6 + (x+y)) &= 1 \end{aligned}$$

1. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -1\\ (xy-6+(x+y)) &= 13\end{aligned}$$

$$\text{Somit folgt}\quad \begin{aligned}x+y &= 7\\ xy &= 12\end{aligned}$$

Also sind $(3,4)$ und $(4,3)$ Lösungspaare.

3. $$\begin{aligned}(xy-6-(x+y)) &= -13\\ (xy-6+(x+y)) &= 1\end{aligned}$$

$$\text{Somit folgt}\quad \begin{aligned}x+y &= 7\\ xy &= 0\end{aligned}$$

Also sind $(0,7)$ und $(7,0)$ Lösungspaare.

$$1.\quad \begin{aligned} (xy-6-(x+y)) &= -1 \\ (xy-6+(x+y)) &= 13 \end{aligned}$$

$$\text{Somit folgt} \quad \begin{aligned} x+y &= 7 \\ xy &= 12 \end{aligned}$$

Also sind $(3,4)$ und $(4,3)$ Lösungspaare.

$$3.\quad \begin{aligned} (xy-6-(x+y)) &= -13 \\ (xy-6+(x+y)) &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Somit folgt} \quad \begin{aligned} x+y &= 7 \\ xy &= 0 \end{aligned}$$

Also sind $(0,7)$ und $(7,0)$ Lösungspaare.

$$\mathbb{L} = \{(0,7),(3,4),(4,3),(7,0)\}$$

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $x + y = x^2 - xy + y^2$.

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $x + y = x^2 - xy + y^2$.

$$x^2 - x + y^2 - y - xy = 0$$

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $x + y = x^2 - xy + y^2$.

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad | + 1 \end{aligned}$$

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $x + y = x^2 - xy + y^2$.

$$\begin{aligned}
x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad \mid +1 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 1
\end{aligned}$$

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $x + y = x^2 - xy + y^2$.

$$\begin{aligned}
x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad \mid +1 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 1 \\
(\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2) &= 1 \quad \mid \cdot 2
\end{aligned}$$

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $x + y = x^2 - xy + y^2$.

$$
\begin{array}{rcll}
x^2 - x + y^2 - y - xy & = & 0 & \\
\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}y^2 - y + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 & = & 0 & \mid +1 \\
\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y^2 - y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 & = & 1 & \\
(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}y^2 - y + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2) & = & 1 & \mid \cdot 2 \\
(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) & = & 2 &
\end{array}
$$

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $x+y=x^2-xy+y^2$.

$$\begin{aligned}
x^2-x+y^2-y-xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2-x+\tfrac{1}{2}y^2-y+\tfrac{1}{2}x^2-xy+\tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad \mid +1 \\
\tfrac{1}{2}x^2-x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}y^2-y+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x^2-xy+\tfrac{1}{2}y^2 &= 1 \\
\left(\tfrac{1}{2}x^2-x+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}y^2-y+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}x^2-xy+\tfrac{1}{2}y^2\right) &= 1 \quad \mid \cdot 2 \\
(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2) &= 2 \\
(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2 &= 2
\end{aligned}$$

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $x + y = x^2 - xy + y^2$.

$$\begin{aligned}
x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad \mid +1 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 1 \\
(\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2) &= 1 \quad \mid \cdot 2 \\
(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) &= 2 \\
(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 &= 2
\end{aligned}$$

Da x und y ganzzahlig sind, muss gelten

$$(x-1)^2 \leq 1 \text{ und } (y-1)^2 \leq 1, \text{ also } x, y \in \{0, 1, 2\}.$$

Beispiel

Finde alle ganzzahligen Lösungen von $x + y = x^2 - xy + y^2$.

$$
\begin{aligned}
x^2 - x + y^2 - y - xy &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 0 \quad \mid +1 \\
\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 &= 1 \\
(\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2) &= 1 \quad \mid \cdot 2 \\
(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) &= 2 \\
(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 &= 2
\end{aligned}
$$

Da x und y ganzzahlig sind, muss gelten

$$(x-1)^2 \leq 1 \text{ und } (y-1)^2 \leq 1, \text{ also } x, y \in \{0, 1, 2\}.$$

$$\mathbb{L} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

Allgemeine Idee

1. Bringe DG durch einfache Umformung / Ergänzung auf die Form
   Produkt einfacher Terme = ganze Zahl.
2. Schränke somit die Intervalle, in denen die Variablen Werte einnehmen können durch passende Ungleichungen ein.
3. Erhalte somit (endlich viele) Lösungen.

Beispiel (Rumänien)

Finde alle positiven ganzzahligen Lösungen von $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$.

Beispiel (Rumänien)

Finde alle positiven ganzzahligen Lösungen von $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$.

DG besitzt Symmetrie bzgl. x, y und z. Können uns zum Finden von Lösungen zunächst auf den Fall

$$2 \leq x \leq y \leq z$$

einschränken.

Beispiel (Rumänien)

Finde alle positiven ganzzahligen Lösungen von $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$.

DG besitzt Symmetrie bzgl. x, y und z. Können uns zum Finden von Lösungen zunächst auf den Fall

$$2 \leq x \leq y \leq z$$

einschränken. Dann gilt auch $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5}$.

Beispiel (Rumänien)

Finde alle positiven ganzzahligen Lösungen von $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$.

DG besitzt Symmetrie bzgl. x, y und z. Können uns zum Finden von Lösungen zunächst auf den Fall

$$2 \leq x \leq y \leq z$$

einschränken. Dann gilt auch $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5}$. Also insgesamt

$$2 \leq x \leq 5.$$

Beispiel (Rumänien)

Finde alle positiven ganzzahligen Lösungen von $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$.

DG besitzt Symmetrie bzgl. x, y und z. Können uns zum Finden von Lösungen zunächst auf den Fall

$$2 \leq x \leq y \leq z$$

einschränken. Dann gilt auch $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5}$. Also insgesamt

$$2 \leq x \leq 5.$$

Betrachte nun alle möglichen Fälle für x getrennt:

Für $x = 2$ erhalten wir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad = \quad \frac{3}{5}$$

Für $x = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{3}{5} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Für $x = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{y} + \tfrac{1}{z} &= \tfrac{3}{5} \\ \tfrac{1}{y} + \tfrac{1}{z} &= \tfrac{1}{10} \end{aligned}$$

Da $y \leq z$ folgt $11 \leq y \leq 20$. Weiteres umformen obiger Gleichung ergibt

$$z = \frac{10y}{y - 10}.$$

Da z ganzzahlig sein muss können wir y einschränken auf

$$y \in \{11, 12, 14, 15, 20\}.$$

Für $x = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{y} + \tfrac{1}{z} &= \tfrac{3}{5} \\ \tfrac{1}{y} + \tfrac{1}{z} &= \tfrac{1}{10} \end{aligned}$$

Da $y \leq z$ folgt $11 \leq y \leq 20$. Weiteres umformen obiger Gleichung ergibt

$$z = \frac{10y}{y - 10}.$$

Da z ganzzahlig sein muss können wir y einschränken auf

$$y \in \{11, 12, 14, 15, 20\}.$$

Und jetzt hilft nur noch $x = 2$ und entsprechende y Werte einsetzen und zugehöriges z berechnen:

$$\mathbb{L} = \{(2, 11, 110), (2, 12, 60), (2, 14, 35), (2, 15, 30), (2, 20, 20)\}$$

Für $x = 3$ ...
Für $x = 4$ ...
Für $x = 5$ ...

Für $x = 3$ ...
Für $x = 4$ ...
Für $x = 5$ ...

Achtung:
Da unsere DG komplett symmetrisch in x, y und z ist sind auch alle Permutationen von $\mathbb{L}$ Lösungen, also z.B. $(2, 11, 110) \in \mathbb{L}$, somit auch

$$(2, 110, 11), (11, 2, 110), (11, 110, 2), (110, 2, 11), (110, 11, 2) \in \mathbb{L}.$$