UNIVERSITÄT LEIPZIG

Christian Eder
Sommersemester 2019

Lineare Algebra für Informatiker
Blatt 8

Abgabe bis Mittwoch, 29.05.2019, 15:00 Uhr, Postfach Eder Raum A 514

Jede Abgabe ist in der **Kopfzeile des Deckblatts** mit

Name, Vorname, Matrikelnummer, Lehrkraft, Buchstabe der Übungsgruppe

zu versehen.

Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen bzw. zu beweisen!

Aufgabe 33. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$. Seien U_1, U_2 Unterräume von V. Dann gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2).$$

Aufgabe 34. Betrachten Sie die Teilmenge $U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Geben Sie eine lineare Abbildung F an, so dass $\mathrm{Ker}(F) = U$. Weisen Sie die Linearität von F explizit nach.

(b) Berechnen Sie $\dim(U)$.

Aufgabe 35. Es seien K ein Körper und V, W K-Vektorräume. Weiterhin seien $F, G : V \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\mathrm{Ker}(F) \cap \mathrm{Ker}(G) \subseteq \mathrm{Ker}(F + G)$.

(b) $\mathrm{Im}(F + G) \subseteq \mathrm{Im}(F) + \mathrm{Im}(G)$.

(c) Geben Sie für (a) und (b) jeweils ein Beispiel an, sodass jeweils “$\subsetneq$” gilt.

Aufgabe 36. Es seien V und W zwei K-Vektorräume über einem Körper K. Weiterhin seien $F : V \to W$ eine lineare Abbildung und B eine Basis von V. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:[1]

(a) F ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $F(B)$ ist linear unabhängig.

(b) F ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ $F(B)$ ist ein Erzeugendensystem von W.

[1] Beachten Sie, dass die Notation $F(B)$ der Schreibweise $F[B]$ im Skript von Herrn Hardtke entspricht.