UNIVERSITÄT LEIPZIG

Christian Eder
Sommersemester 2019

Lineare Algebra für Informatiker
Blatt 9

Abgabe bis Mittwoch, 05.06.2019, 15:00 Uhr, Postfach Eder Raum A 514

Jede Abgabe ist in der **Kopfzeile des Deckblatts** mit

Name, Vorname, Matrikelnummer, Lehrkraft, Buchstabe der Übungsgruppe

zu versehen.

Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen bzw. zu beweisen!

Aufgabe 37. Es seien V ein K-Vektorraum über einem Körper K und $F \in \mathrm{End}(V)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Falls $F \circ F = F$, so gilt $V = \mathrm{Ker}(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$.

(b) Falls $V = \mathrm{Ker}(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$, so gilt $F \circ F = F$.

Aufgabe 38. Es seien K ein Körper und $A \in M(3 \times 3, K)$. Geben Sie jeweils eine Matrix $E \in M(3 \times 3, K)$, so dass die Abbildung $F_E : M(3 \times 3, K) \to M(3 \times 3, K), A \mapsto E \cdot A$ folgende Aktionen durchführt:

(a) Multiplikation der dritten Zeile mit $\lambda \in K$.

(b) Addition des λ-fachen von Zeile 1 auf Zeile 3 für $\lambda \in K$.

(c) Vertauschen von Zeile 2 und Zeile 3.

(d) Addition des λ-fachen von Zeile 2 auf Zeile 3 und Multiplikation von Zeile 2 mit σ für $\lambda, \sigma \in K$.

Aufgabe 39. Rechnen mit Matrizen:

(a) Geben Sie quadratische Matrizen $A \neq 0, B \neq 0$ an, sodass gilt: $AB = BA = 0$.

(b) Geben Sie quadratische Matrizen $A \neq 0, B \neq 0$ an, sodass gilt: $AB = 0$ und $BA \neq 0$.

(c) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ gegeben. Geben Sie die Matrix A^n an und beweisen Sie ihre Aussage.

Aufgabe 40. Betrachten Sie die folgenden beiden geordneten Basen des Vektorraums $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung. Berechnen Sie die zugehörige darstellende Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$.