UNIVERSITÄT LEIPZIG

Christian Eder
Sommersemester 2019

Lineare Algebra für Informatiker
Blatt 10

Abgabe bis Mittwoch, 12.06.2019, 15:00 Uhr, Postfach Eder Raum A 514

Jede Abgabe ist in der **Kopfzeile des Deckblatts** mit

Name, Vorname, Matrikelnummer, Lehrkraft, Buchstabe der Übungsgruppe

zu versehen.

Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen bzw. zu beweisen!

Aufgabe 41. Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $A \in M(n \times n, K)$ mit $AB = BA$ für alle $B \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie, dass gilt: $A = \lambda E_n$ für ein $\lambda \in K$.

Aufgabe 42. Es seien $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ und $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)$ geordnete Basen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & -6\end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift von F.

(b) Finden Sie geordnete Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$ von $\mathbb{R}^2$, sodass gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

Aufgabe 43. Es seien $A = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ und $b = \begin{pmatrix}1\\2\\9\end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L(A, b)$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit dem Gaußverfahren.

(b) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Im}(F_A))$ für die zu A gehörige lineare Abbildung $F_A : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$.

Aufgabe 44. Es seien $t \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & -1\\1 & 4 & 10 & 2\\-1 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$ und $b_t = \begin{pmatrix}t\\3+t\\1-t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie, mithilfe des Gaußverfahrens, die Lösungsmenge $L(A, b_t)$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b_t$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.