UNIVERSITÄT LEIPZIG

Christian Eder
Sommersemester 2019

Lineare Algebra für Informatiker
Blatt 11

Abgabe bis Mittwoch, 19.06.2019, 15:00 Uhr, Postfach Eder Raum A 514

Jede Abgabe ist in der **Kopfzeile des Deckblatts** mit

Name, Vorname, Matrikelnummer, Lehrkraft, Buchstabe der Übungsgruppe

zu versehen.

Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen bzw. zu beweisen!

Aufgabe 45. Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n} \in M(n \times n, K)$ mit $a_{i,j} = 1$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir Matrizen $B_k := A - kE_n$. Berechnen Sie:

(a) $\operatorname{Rang}(B_1)$.

(b) $\operatorname{Rang}(B_n)$.

Aufgabe 46. Berechnen Sie Basen für $\operatorname{Ker}(F_A)$ und $\operatorname{Im}(F_A)$ für die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 3, \mathbb{R})$$

gehörigen linearen Abbildung $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 47. Überprüfen Sie, ob die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Z}_{13})$$

invertierbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls B^{-1} mithilfe des Gaußverfahrens.

Aufgabe 48. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, K)$.

(a) Zeigen Sie: Gilt $A^2 = 0$, so ist $E_n - A$ invertierbar.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Gilt $A^k = 0$ für ein $k \geqslant 2$, so ist $E_n - A$ invertierbar.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Gilt $A^k = 0$ für ein $k \geqslant 2$, so gilt $\operatorname{Rang}(A) < n$.