UNIVERSITÄT LEIPZIG

Christian Eder
Sommersemester 2019

Lineare Algebra für Informatiker
Bonus Blatt 13

Abgabe bis Mittwoch, 03.07.2019, 15:00 Uhr, Postfach Eder Raum A 514

Jede Abgabe ist in der **Kopfzeile des Deckblatts** mit

Name, Vorname, Matrikelnummer, Lehrkraft, Buchstabe der Übungsgruppe

zu versehen.

Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen bzw. zu beweisen!

Aufgabe 53. Überprüfen Sie, ob die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) := 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_3y_3$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

Aufgabe 54. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $A \subseteq V$ eine Teilmenge und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie:

(a) $A^\perp$ ist ein Unterraum von V.

(b) $A^\perp = (\operatorname{span}(A))^\perp$.

Aufgabe 55. Es sei das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ gegeben[1] durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die geordnete Basis $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ keine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

(b) Berechnen Sie mit dem Verfahren von Gram-Schmidt,[2] ausgehend von $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, eine Orthonormalbasis C von $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Aufgabe 56. Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynomial χ_A von A. Bestimmen Sie die Nullstellen von χ_A.

(b) Berechnen Sie Basen der Eigenräume $E_A(\lambda)$ für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ von A.

---

[1] Sie müssen nicht mehr nachweisen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.

[2] Betrachten Sie hierzu den Beweis von Satz VII.2.7 aus dem Skript von Herrn Hardtke.