UNIVERSITÄT LEIPZIG

Christian Eder
Sommersemester 2019

Lineare Algebra für Informatiker
Abschlussklausur

Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen bzw. zu beweisen!

Aufgabe 1. $(2+1$ Punkte$)$

(a) Bestimmen Sie mithilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von 255 und 191. Bestimmen Sie weiterhin $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass gilt $d = a \cdot 255 + b \cdot 191$.

(b) Bestimmen Sie ein Inverses von $[255]_{191}$ in $\mathbb{Z}_{191}$.

Aufgabe 2. $(2+2$ Punkte$)$ Seien Teilmengen U, V von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$U = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0 \right\}, V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass U und V Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Aufgabe 3. $(3+3$ Punkte$)$ Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Überprüfen Sie, ob A diagonalisierbar ist. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4. (2 + 2 + 3 Punkte) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung $F_{A_\lambda} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die (bzgl. den Standardbasen) darstellende Matrix

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist F_{A_λ} injektiv?

(b) Überprüfen Sie, ob A_{-1} invertierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls $(A_{-1})^{-1}$.

(c) Seien $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ geordnete Basen von $\mathbb{R}^3$.

Berechnen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F_{A_2})$.

Aufgabe 5. (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\{f \in V_{\mathbb{R}} : f(0) \cdot f(1) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $V_{\mathbb{R}}$.

(b) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Falls $(g \cdot h)^2 = g^2 \cdot h^2$ für alle $g, h \in G$, so ist $(G, \cdot)$ abelsch.

(c) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A \cdot A = E_n$. Dann gilt: $\det(A) = \pm 1$.

(d) Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 - x_2y_2$ eine Abbildung. Dann gilt: φ ist ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

(e) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 2 & 9 & 16 & 17 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & 19 & 20 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 12 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(6 \times 6, \mathbb{Q})$$

gegeben. Dann gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{6!}$.

– Viel Erfolg –