UNIVERSITÄT LEIPZIG

Christian Eder
Sommersemester 2019

Lineare Algebra für Informatiker
Nachklausur

Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen bzw. zu beweisen!

Aufgabe 1. $(2 + 2$ Punkte$)$ Es seien die beiden Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

in S_6 gegeben.

(a) Geben Sie jeweils die Permutation $\sigma\tau$ und τ^{-1} an.

(b) Berechnen Sie jeweils das Signum von $\sigma\tau$ und τ^{-1}.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei $t \in \mathbb{R}$. Weiterhin seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{R}) \text{ und } b_t = \begin{pmatrix} t \\ 3+t \\ 1-t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L(A, b_t)$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b_t$ in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 3. $(3 + 1 + 2$ Punkte$)$ Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

(b) Geben Sie eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren von A besteht.

(c) Geben Sie eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ sowie eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ an, so dass gilt $D = TAT^{-1}$.

Aufgabe 4. (2 + 1 + 3 Punkte) Es seien $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ geordnete Basen[1] des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift von F.

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)$.

(c) Überprüfen Sie, ob F bijektiv ist und geben Sie gegebenenfalls die Funktionsvorschrift für F^{-1} an.

Aufgabe 5. (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle Unterräume U, V von $\mathbb{R}^n$ mit $\dim(U) \leqslant \dim(V)$ gilt: U ist ein Unterraum von V.

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Falls $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ existiert mit $A^k = 0$ so hat A nur die Null als Eigenwert.

(c) Sei $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Dann gilt: $\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0$.

(d) $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. des Skalarprodukts[2] $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$.

(e) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: $\dim(\mathrm{Ker}(F)) \geqslant 1$.

– Viel Erfolg –

[1] Dies brauchen Sie nicht mehr nachzuweisen.

[2] Sie können annehmen, dass φ ein Skalarprodukt ist.