

0. Einleitung und Motivation

Funktionentheorie ist — kurz gesagt — die Theorie der Differential- und Integralrechnung in einer komplexen Variablen. Eigentlich wäre also der Name „komplexe Analysis“ zutreffender, und in der Tat wird der Stoff dieser Vorlesung im Englischen auch als „complex analysis“ bezeichnet. Der deutsche Begriff „Funktionentheorie“ ist historisch bedingt (viele der Begründer der Funktionentheorie sind Deutsche, z. B. Bernhard Riemann und Karl Weierstraß) und bis heute erhalten geblieben.

Obwohl die grundlegenden Definitionen der Funktionentheorie (z. B. die der komplexen Differenzierbarkeit) formal genauso wie im Reellen aussehen, führt der zweidimensionale Charakter der komplexen Zahlenebene dazu, dass sich die komplexe Theorie sehr deutlich von der reellen unterscheidet. Ist z. B. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung, so können wir f auf zwei Arten auffassen: einerseits ist f eine Funktion in *einer komplexen* Variablen, andererseits ist aber auch $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, so dass wir f genauso gut als Funktion in *zwei reellen* Variablen auffassen können. Die Funktionentheorie wird dadurch zu einer sehr interessanten Mischung aus ein- und mehrdimensionaler Analysis. Ein wesentliches „eindimensionales Merkmal“ der Funktionentheorie ist z. B., dass die Ableitung einer komplex differenzierbaren Funktion wieder eine Funktion (und nicht wie im Mehrdimensionalen eine Matrix) ist. Ein wesentliches „zweidimensionales Merkmal“ ist dagegen, dass man bei Grenzwertbetrachtungen nicht nur „von links und rechts“ sondern aus einer ganzen zweidimensionalen Umgebung gegen einen gegebenen Punkt laufen kann, und somit (im Gegensatz zur eindimensionalen reellen Analysis) die Topologie der Ebene eine ganz wichtige Rolle spielt.

In der Tat werden wir sehen, dass diese interessante Mischung aus ein- und mehrdimensionaler Analysis dazu führt, dass die komplexe Analysis sehr viel schöner ist als die reelle. Ihr werdet euch sicher noch an die zahlreichen „Gegenbeispiele der reellen Analysis“ erinnern: Abbildungen, die partiell aber nicht total differenzierbar sind, total aber nicht stetig partiell differenzierbar, einmal aber nicht zweimal differenzierbar, unendlich oft differenzierbar aber trotzdem nicht durch ihre Taylorreihe darstellbar, und vieles mehr. *In der komplexen Analysis gibt es diese ganzen Unterschiede nicht.* Es gibt hier nur *einen* Begriff, nämlich den der komplexen Differenzierbarkeit. Eine Funktion, die diese Eigenschaft hat, ist damit automatisch unendlich oft differenzierbar, (lokal) integrierbar und (lokal) durch ihre Taylorreihe darstellbar. Außerdem sind solche komplex differenzierbaren Funktionen bereits durch ihre Funktionswerte auf einer beliebig kleinen offenen Menge eindeutig bestimmt (!), und es gibt einige sehr einfache Möglichkeiten, mit denen man oft ihre Integrale ausrechnen kann, auch wenn man keine Stammfunktion explizit kennt. In vielen Fällen kann man sogar reelle Integrale erst dadurch berechnen, dass man sie als komplexe Integrale auffasst und sie dann mit den Methoden der Funktionentheorie löst.

Außer diesen schönen Eigenschaften komplex differenzierbarer Funktionen gibt es noch viele weitere Anwendungen der Funktionentheorie, von denen wir einige in dieser Vorlesung behandeln werden. Erwähnenswert ist hier vor allem der Fundamentalsatz der Algebra (d. h. die Aussage, dass jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine Nullstelle besitzt), für den wir mit funktionentheoretischen Mitteln mehrere einfache Beweise sehen werden. Auch in der Zahlentheorie gibt es viele Anwendungen, von denen wir einige im letzten Kapitel dieses Skripts sehen werden. Nicht zuletzt stammt auch das derzeit berühmteste ungelöste Problem der Mathematik, die sogenannte Riemannsche Vermutung, aus der Funktionentheorie (bzw. aus dem Grenzgebiet zwischen Funktionentheorie und Zahlentheorie). Wir werden auch hierauf am Schluss dieser Vorlesung kurz eingehen.

Insgesamt wird die Funktionentheorie aufgrund ihrer relativ naheliegenden Konstruktionen sowie ihrer einfach zu verstehenden und dennoch sehr vielfältigen und mächtigen Resultate von vielen (Dozenten sowie Studenten) als die „schönste Vorlesung des Mathematikstudiums“ bezeichnet. Ich überlasse es euch selbst, euch diesbezüglich eine Meinung zu bilden ...