1. Komplexe Zahlen

Bevor wir mit der komplexen Analysis beginnen, wollen wir zunächst die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften der komplexen Zahlen noch einmal kurz wiederholen.

Definition 1.1. Die **Menge der komplexen Zahlen** wird definiert als $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. Auf dieser Menge betrachten wir die beiden Verknüpfungen

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2) \qquad \text{(Addition)}$$

$$\text{und} \qquad (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1) \qquad \text{(Multiplikation)}$$

(mit $x_1,y_1,x_2,y_2 \in \mathbb{R}$). Elemente der Form $(x,0)$ schreiben wir einfach als x: beachte, dass diese Elemente genauso addiert und multipliziert werden wie reelle Zahlen, so dass wir $\mathbb{R}$ auf diese Art als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen können. Setzen wir noch $\mathrm{i} := (0,1)$, so können wir also jedes Element $(x,y) \in \mathbb{C}$ als $x+\mathrm{i}y$ schreiben — was die übliche Schreibweise für komplexe Zahlen ist.

Bemerkung 1.2.

(a) Mit der Definition 1.1 ergeben sich die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen offensichtlich einfach durch formales Addieren und Ausmultiplizieren von Ausdrücken der Form $x+\mathrm{i}y$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ unter Beachtung der Relation $\mathrm{i}^2 = -1$.

(b) Man rechnet leicht nach, dass die komplexen Zahlen mit den beiden gegebenen Verknüpfungen einen Körper bilden. Da die Addition komplexer Zahlen einfach die Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$ ist, ist das additive Inverse von $x+\mathrm{i}y$ gerade $-x-\mathrm{i}y$. Das multiplikative Inverse zu einer komplexen Zahl $x+\mathrm{i}y \neq 0$ ist $\frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2+y^2}$.

Definition 1.3. Für eine komplexe Zahl $z = x+\mathrm{i}y$ (mit $z \in \mathbb{C}$ und $x,y \in \mathbb{R}$) definieren wir

(a) den **Realteil** von z als $\operatorname{Re} z := x \in \mathbb{R}$;

(b) den **Imaginärteil** von z als $\operatorname{Im} z := y \in \mathbb{R}$;

(c) die zu z **komplex konjugierte Zahl** als $\overline{z} := x-\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$;

(d) den **Betrag** von z als $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (also genauso wie die normale euklidische Norm eines Vektors in $\mathbb{R}^2$).

Zwischen diesen Zahlen gelten die folgenden elementaren Relationen:

Lemma 1.4. *Für alle $z,w \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\cdot(z+\overline{z})$ *und* $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot(z-\overline{z})$*;*

(b) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$ *und* $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$ *(d. h. die komplexe Konjugation ist ein Körperisomorphismus);*

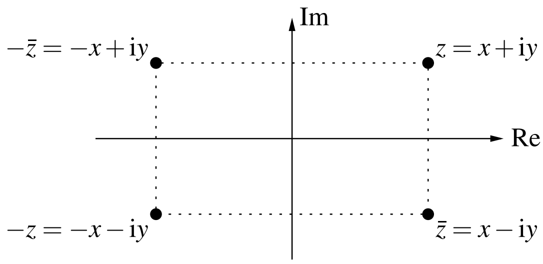
(c) $\overline{\overline{z}} = z$*;*

(d) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$ *und* $|z+w| \leq |z|+|w|$*;*

(e) $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$*.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen; die Ungleichung in (d) ist genau die bekannte Dreiecksungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$. □

Bemerkung 1.5. Da wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ definiert haben, können wir komplexe Zahlen als Punkte in der Ebene, der sogenannten **komplexen Zahlenebene** darstellen. Das folgende Bild zeigt zum Beispiel, welche Zahlen man erhält, wenn man einen gegebenen Punkt $z \in \mathbb{C}$ an der reellen oder imaginären Achse spiegelt.



Wir kommen nun zum ersten Begriff der Analysis, nämlich der Konvergenz von Folgen und Reihen. Wie definieren diesen Begriff wie erwartet, wobei wir entweder die Definition aus der eindimensionalen Analysis für den Grundkörper $\mathbb{C}$ oder die aus der zweidimensionalen Analysis mit dem Grundkörper $\mathbb{R}$ (und der euklidischen Norm) verwenden können:

Definition 1.6 (Konvergenz von Folgen und Reihen)**.** Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{C}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |z_n - a| < \varepsilon$$

gilt. Wie üblich heißt a dann auch der **Grenzwert** von (z_n), und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ oder einfach $z_n \to a$. Weiterhin setzen wir wie üblich für die zugehörige Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z_n,$$

sofern dieser Grenzwert existiert. Wir sagen in diesem Fall, dass die durch (z_n) bestimmte Reihe konvergiert und nennen $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ den Wert dieser unendlichen Reihe.

Bemerkung 1.7. Wir erinnern uns kurz an die wesentlichen Konvergenzkriterien aus den Grundlagen der Mathematik:

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ der zugehörigen Beträge konvergiert. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent; die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht [G2, Lemma 7.12].

(b) Eine Folge (z_n) konvergiert genau dann gegen a, wenn die reellen Folgen $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ gegen $\operatorname{Re} a$ bzw. $\operatorname{Im} a$ konvergieren [G2, Lemma 23.18]. Insbesondere vertauscht die Grenzwertbildung daher mit der komplexen Konjugation: gilt $z_n \to a$, so folgt $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} a$ sowie $-\operatorname{Im} z_n \to -\operatorname{Im} a$ und damit auch $\overline{z_n} \to \overline{a}$.

(c) (**Quotientenkriterium für Reihen**) Es seien komplexe Zahlen $z_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Ist dann der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \dots$

- kleiner als 1, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent,
- größer als 1, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ divergent

[G2, Satz 7.21]. Beachte, dass das Quotientenkriterium nicht in jedem Fall über Konvergenz oder Divergenz der Reihe entscheiden kann; z. B. dann nicht, wenn die Folge der betrachteten Quotienten gegen 1 konvergiert.

(d) (**Wurzelkriterium für Reihen**) Analog zum Quotientenkriterium gibt es auch das Wurzelkriterium [G2, Satz 7.22]: es lautet wörtlich genauso wie das Quotientenkriterium, mit dem einzigen Unterschied, dass statt des Quotienten $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ der Ausdruck $\sqrt[n]{|z_n|}$ genommen wird und der Grenzwert durch den Limes superior, also den größten Häufungspunkt, ersetzt werden darf. Beide Kriterien beruhen letztlich auf dem Vergleich mit der geometrischen Reihe.

Die wichtigste Anwendung der Folgenkonvergenz im Komplexen ist die komplexe Exponentialfunktion, die wir jetzt einführen:

Lemma und Definition 1.8 (**Komplexe Exponentialfunktion**). *Für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert der Grenzwert*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage trivial, und für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt

$$\left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| \to 0$$

für $n \to \infty$. Damit konvergiert die Exponentialreihe nach dem Quotientenkriterium aus Bemerkung 1.7 (c) absolut, und ist nach Bemerkung 1.7 (a) somit auch konvergent. □

Bemerkung 1.9.

(a) Die (komplexe) Exponentialfunktion genügt der Funktionalgleichung $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ (siehe [G2, Folgerung 7.34]; für den Beweis zeigt man, dass man das Produkt $(\sum_n \frac{z^n}{n!})(\sum_m \frac{w^m}{m!})$ aufgrund der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe als Cauchy-Produkt „naiv ausmultiplizieren" kann, und fasst die Terme geschickt zusammen).

(b) Die komplexe Exponentialfunktion „vertauscht mit der komplexen Konjugation", d. h. es gilt

$$\begin{aligned} e^{\overline{z}} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z}^n}{n!} \\ &= \lim_{N\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} && \text{(nach Lemma 1.4 (b))} \\ &= \overline{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} && \text{(nach Bemerkung 1.7 (b))} \\ &= \overline{e^z}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also für eine „rein imaginäre" Zahl $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$

$$|e^{iy}| = \sqrt{e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}}} = \sqrt{e^{iy} \cdot e^{-iy}} = \sqrt{e^{iy-iy}} = \sqrt{e^0} = 1,$$

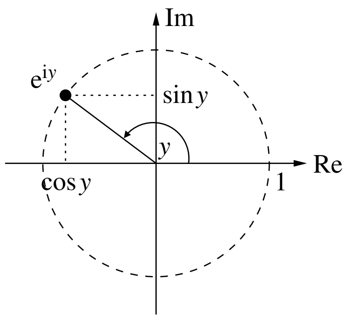
d. h. komplexe Zahlen der Form e^{iy} liegen auf dem Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene. Dies können wir noch etwas besser verstehen:

(c) Für $y \in \mathbb{R}$ setzen wir bekanntlich [G2, Definition 9.12]

$$\cos y := \operatorname{Re} e^{iy} = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$$

$$\text{und} \qquad \sin y := \operatorname{Im} e^{iy} = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$$

(siehe Lemma 1.4 (a) für die jeweils zweite Formel). Also ist $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ genau der Punkt in der komplexen Zahlenebene, der mit der positiven reellen Halbachse wie im folgenden Bild den Winkel y einschließt:



In der Funktionentheorie betrachtet man allerdings in der Regel Funktionen von komplexen Variablen. Daher wollen wir die Winkelfunktionen auch für alle komplexen Zahlen festlegen. Erwartungsgemäß definieren wir daher **Kosinus** und **Sinus** für alle $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\cos z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \quad \text{und} \quad \sin z := \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}).$$

Beachte jedoch, dass für allgemeine komplexe Zahlen *nicht* die Formeln $\cos z = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ und $\sin z = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ gelten: in der Regel werden $\cos z$ und $\sin z$ nicht einmal reelle Zahlen sein. Wir können die Winkelfunktionen aber wie im Reellen als eine Potenzreihe schreiben, z. B. für den Kosinus

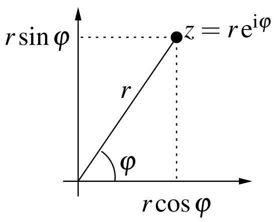
$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}\left(1 + (\mathrm{i}z) + \frac{(\mathrm{i}z)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}z)^3}{3!} + \cdots + 1 + (-\mathrm{i}z) + \frac{(-\mathrm{i}z)^2}{2!} + \frac{(-\mathrm{i}z)^3}{3!} + \cdots\right)\\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

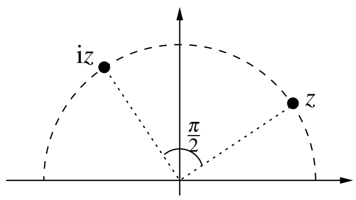
(beachte, dass wir die Terme in den Reihen wegen der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe beliebig umordnen können). Analog gilt für den Sinus $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 1.10 (Polarkoordinaten)**.** Ist $z \neq 0$ wie im Bild unten links eine komplexe Zahl mit Betrag $r = |z|$, die mit der positiven reellen Halbachse den Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ einschließt, so können wir z nach Bemerkung 1.9 (c) schreiben als

$$z = r\cos\varphi + \mathrm{i}r\sin\varphi = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Wir nennen φ den **Winkel** oder das **Argument** $\arg z$ von z; die Größen r und φ heißen die **Polarkoordinaten** von z.





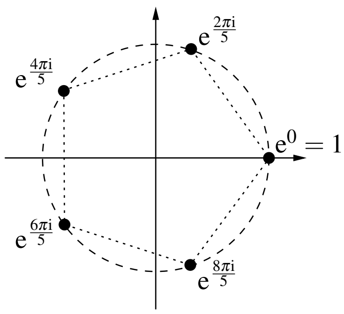
Aus der Polarkoordinatendarstellung erhalten wir eine sehr einfache geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen: für $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ ist nach Bemerkung 1.9 (a)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)},$$

d. h. bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert. Ein einfaches Beispiel davon zeigt das Bild oben rechts: da $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ die Zahl mit Betrag 1 und Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist, entspricht die Drehung einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ um $\frac{\pi}{2}$ um den Nullpunkt gerade einer Multiplikation mit i.

Beispiel 1.11 (Einheitswurzeln)**.** Wir betrachten die Polynomgleichung $z^n - 1 = 0$ für ein fest gegebenes $n \geq 1$. Welche Lösungen hat diese Gleichung über $\mathbb{C}$? Wir wissen aus der linearen Algebra, dass ein solches Polynom höchstens n Nullstellen haben kann. Andererseits können wir jetzt aber auch n verschiedene Lösungen dieser Gleichung angeben: die Zahlen $\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}k}{n}}$ für $k = 0, \ldots, n-1$, also nach unserer Interpretation aus Bemerkung 1.9 (c) die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks wie in dem Bild unten, erfüllen die gegebene Gleichung, denn

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}k}{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k} = (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^k = 1^k = 1.$$



Wir nennen diese Zahlen die n-ten **Einheitswurzeln**. Aus der üblichen Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren folgt dann also insbesondere die Polynomgleichung

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\cdots\left(z - e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}}\right).$$

Analog kann man auch die Gleichung $z^n = c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{C}$ mit $c \neq 0$ lösen: ist $c = r e^{i\varphi}$ die Polarkoordinatendarstellung von c, so erhalten wir offensichtlich die Lösungen

$$\sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\varphi}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi i k}{n}} \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1,$$

also eine spezielle Lösung $\sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i\varphi}{n}}$ dieser Gleichung multipliziert mit allen n-ten Einheitswurzeln.

Aufgabe 1.12. Stelle die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

(a) $z = \frac{2+i}{1-i}$;

(b) $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1357}$;

(c) alle Lösungen der Gleichung $z^4 + z^2 + 1 = 0$;

(d) alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| < 1$;

Aufgabe 1.13. Welche der folgenden bekannten Eigenschaften der reellen Winkelfunktionen sind auch für alle komplexen Zahlen gültig?

(a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ für alle z;

(b) $|\cos z| \leq 1$ für alle z;

(c) die Gleichung $\sin z = 0$ hat genau die Lösungen $n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$;

(d) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ für alle z.

Aufgabe 1.14.

(a) Zeige, dass drei verschiedene Punkte $a, b, c \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene genau dann die entgegen dem Uhrzeigersinn benannten Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind, wenn die Gleichung $a + \omega b + \omega^2 c = 0$ mit $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ gilt.

(b) Gegeben sei ein Dreieck D in der Ebene (im Bild rechts grau gezeichnet). Wir errichten nun über jeder Seite von D ein gleichseitiges Dreieck. Zeige unter Benutzung von (a), dass die Mittelpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke selbst wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden (im Bild gestrichelt eingezeichnet).